Изв. АН АрмССР (сер. ТН), т. XL, № 2, 1987

ЭЛЕКТРОТЕХНИКА

В. С. САФАРЯН

ПРИМЕНЕНИЕ ДРОБНО-ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ К ИССЛЕДОВАНИЮ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Линейной электрической цепью (ЛЭЦ) назовем систему S_n из n линейных уравнений

$$YU = I, \tag{1}$$

где $Y = [y_{ij}]$, $i, j = \overline{1, n}$ — квадратная матрица порядка n; $U = [U_i]$; $I = [I_i]$, $i = \overline{1, n}$ — векторы-столбцы порядка n, удовлетворяющие условиям: а) $y_{ij} = y_{ji}$, $i, j = \overline{1, n}$; б) $y_{ii} = -\sum_{j=1}^{n} y_{ij}$, $i = \overline{1, n}$, $j \neq i$; в) $\sum_{i=1}^{n} I_i = 0$; г) в каждой строке (столбце) матрицы Y имеется хотя бы два ненулевых элемента.

Векторы U и I назовем соответственно выходным и входным векторами. Будем считать, что неориентированный связанный граф $G = G(V, E)$ наделен структурой ЛЭЦ, если:

1) каждому ребру $(i, j) \in E$, $i, j \in V$ графа G сопоставлено комплексное число Z_{ij}, называемое весом ребра, причем, $Z_{ij} = Z_{ji} \neq 0$;
2) каждой вершине $i \in V$ графа G сопоставлены две величины U_i и I_i;
3) установлено однозначное отображение $\varphi : G \to S_n$,

где считаем $\varphi(I_i) \equiv I_i$, $\varphi(U_i) \equiv U_i$,

$$y_{ij} = \begin{cases} -\dfrac{1}{Z_{ij}}, & \text{если } (i, j) \in E, \\ 0, & \text{если } (i, j) \notin E. \end{cases}$$

Если $\operatorname{Re} y_{ij} \leqslant 0$, $i = \overline{1, n}$; $j = \overline{i+1, n}$, то ЛЭЦ называется реальной. Отметим, что существует обратное однозначное отображение: $\varphi^{-1} : S_n \to G$, т. е. φ биективное отображение. При фиксированных матрицах преобразования Y и входном векторе I существует бесконечное множество выходных векторов U, отличающихся друг от друга на константу.

Определение. Свертыванием [1] (метод исключения Гаусса) k-ой вершины G (k-ого уравнения S_n) назовем следующее преобразование:

1. Матрица преобразования Y справа умножается на матрицу

$$A = [a_{ij}], \quad i, j = \overline{1, n},$$

где

$a_{ii} = 1,\ i = \overline{1, n};\ a_{ik} = -y_{ik}/y_{kk},\ i = \overline{1, n};\ a_{ij} = 0,\ i, j = \overline{1, n},\ i \neq j,\ j \neq k.$

2. Вектор I справа умножается на матрицу A.

3. Порядок ЛЭЦ уменьшается на единицу (исключается k-ая вершина из графы G и k-ое уравнение из S_n).

Теорема. ЛЭЦ инварианта относительно преобразования свертывания.

Для доказательства теоремы необходимо и достаточно показать инвариантность свойств а), б) и в) ЛЭЦ относительно преобразования свертывания.

Согласно определению свертывания: $\Gamma_k : S_n \to S^{(k)}_{n-1}$;

$$\Gamma_k(y_{ij}) = y_{ij} - y_{ik} y_{kk}^{-1} y_{kj},\ i, j = \overline{1, n};$$
$$\Gamma_k(I_i) = I_i - y_{ik} y_{kk}^{-1} I_k,\ i = \overline{1, n}. \tag{2}$$

Из выражений (2) непосредственно следует инвариантность а), б), и в) относительно преобразования Γ_k:

$$\Gamma_k(y_{ij}) = \Gamma_k(y_{ji}),\ i, j = \overline{1, n}; \qquad \Gamma_k(y_{ii}) = -\sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} \Gamma_k(y_{ij}),\ i = \overline{1, n};$$

$$\sum_{i=1}^{n} \Gamma_k(I_i) = 0.$$

Свойство реальности ЛЭЦ может быть неинвариантно относительно отображения Γ_k, т. е. если $\operatorname{Re} y_{ij} \leqslant 0$, $\operatorname{Re} y_{ik} \leqslant 0$, $\operatorname{Re} y_{kj} \leqslant 0$, $\operatorname{Re} y_{kk} \leqslant 0$, то это вовсе не означает, что $\operatorname{Re}\Gamma_k(y_{ij}) \leqslant 0$.

Определение. ЛЭЦ называется элементарной, если граф $G = \varphi^{-1}(S_n)$ имеет две или три вершины.

В элементарной ЛЭЦ (рис. 1) компонент выходного вектора U выражается через вес ребра дробно-линейной функцией комплексной переменной. Для элементарной ЛЭЦ имеем:

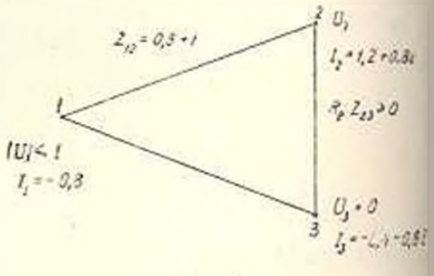

Рис. 1.

$$\left|\begin{matrix} I_1 + I_2 + I_3 = 0 & & \\ \dfrac{1}{Z_{12}} + \dfrac{1}{Z_{13}}, & -\dfrac{1}{Z_{12}}, & -\dfrac{1}{Z_{13}} \\ -\dfrac{1}{Z_{12}}, & \dfrac{1}{Z_{12}} + \dfrac{1}{Z_{23}}, & -\dfrac{1}{Z_{23}} \\ -\dfrac{1}{Z_{13}}, & -\dfrac{1}{Z_{23}}, & \dfrac{1}{Z_{13}} + \dfrac{1}{Z_{23}} \end{matrix}\right| \times \left|\begin{matrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{matrix}\right|. \tag{3}$$

Принимая $U_3=0$, из (3) получаем:

$$\begin{vmatrix} U_1 \\ U_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{Z_{12}+Z_{13}}{Z_{12}Z_{13}}, & -\dfrac{1}{Z_{12}} \\ -\dfrac{1}{Z_{12}}, & \dfrac{Z_{12}+Z_{23}}{Z_{12}} \end{vmatrix}^{-1} \times \begin{vmatrix} I_1 \\ I_2 \end{vmatrix}. \tag{4}$$

Раскрывая (4), для U_1 имеем:

$$U_1 = \frac{Z_{13}}{Z_{12}+Z_{13}+Z_{23}}\left[(Z_{12}+Z_{23})I_1 + Z_{23}I_2\right]. \tag{5}$$

Из (5) видно, что U_1 выражается через вес ребра дробно-линейной функцией. Теперь покажем, что для сложной ЛЭЦ ($|V|>3$) компонент вектора U_m выражается через вес ребра $(i, j)\in E$ линейно-дробной функцией комплексной переменной

$$U_m = L(Z_{ij}) = \frac{aZ_{ij}+b}{cZ_{ij}+d}, \tag{6}$$

где a, b, c, d — фиксированные комплексные числа (c и d одновременно не равны нулю), выраженные через компоненты входного вектора I и вес ребер, кроме (i, j).

Применяя неоднократное преобразование свертывания, сложную ЛЭЦ можно свести к элементарной, сохраняя лишь вершины $m, -i, j\in V$ (если $m=i$ или j, то получается элементарная ЛЭЦ с двумя вершинами). Легко заметить, что произведение L_2L_1 двух дробно-линейных отображений L_1 и L_2 есть также дробно-линейное отображение [2]. Заметим, что преобразование свертывания (2) также является дробно-линейной. Таким образом, т. к. отображение $U=L(Z)$ складывается произведением дробно-линейных отображений, есть снова дробно-линейное. Если $ad-bc=0$, то $L(Z)=\text{const}=\dfrac{a}{c}$. Для ЛЭЦ это означает, что вершина $i(j)$ является висящей и $m\neq i$ $(m\neq j)$.

В заключение рассмотрим следующую задачу: построить элементарную ЛЭЦ, конформно отображающую правую полуплоскость $\operatorname{Re} Z\geqslant 0$ на единичный круг $|U|\leqslant 1$ (рис. 2).

Для решения поставленной задачи установим следующее соответствие граничных точек данных областей:

$$Z_1=i\to U_1=i;\quad Z_2=0\to U_2=-1;\quad Z_3=\infty\to U_3=1. \tag{7}$$

Дробно-линейную функцию (6) можно записать в эквивалентной форме:

$$U=\lambda\frac{\alpha+Z}{\beta+Z};\quad \lambda=\frac{a}{c};\quad \alpha=\frac{b}{a};\quad \beta=\frac{d}{c};\quad \alpha=\beta.$$

Из условий (7) найдем значения α, β, λ.

$i = \lambda \frac{\alpha + i}{\beta + i}$; $-1 = \lambda \frac{\alpha}{\beta}$; $\lambda = 1$, откуда $\lambda = \beta = 1$, $\alpha = -1$. Тем самым, функция, осуществляющая искомое отображение, имеет вид:

$$U = \frac{Z-1}{Z+1}; \quad Z \neq -1. \tag{8}$$

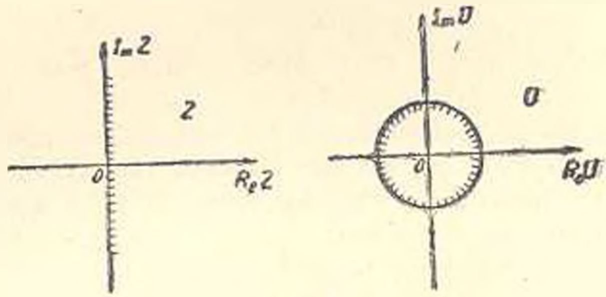

Рис. 2.

В элементарной ЛЭЦ (рис. 1), принимая в качестве ребра с переменным весом ребро (2, 3), для компонента U_1 выходного вектора имеем:

$$U_1 = \frac{Z_{12}(I_1 + I_2) Z + Z_{13} Z_{12} I_1}{Z + Z_{12} + Z_{13}}. \tag{9}$$

Из (8) и (9) получаем:

$$Z_{12} + Z_{13} = 1; \quad Z_{13}(I_1 + I_2) = 1; \quad Z_{13} Z_{12} I_1 = -1. \tag{10}$$

Из множества решений (10) выбираем одно такое, при котором элементарная ЛЭЦ получается реальной (рис.). Полагая $Z_{12} = 0{,}5 + i$ и $Z_{13} = 0{,}5 - i$, для I_1 и I_2 получаем: $I_1 = -0{,}8$; $I_2 = 1{,}2 + i0{,}8$.

Аналогичным образом можно определить область изменения U_2 при $\operatorname{Re} Z_{23} > 0$.

АрмНИИЭ

25. IV. 1984

Վ. Ս. ՍԱՖԱՐՅԱՆ

ԿՈՄՊԼԵՔՍ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆԻ ԿՈՏՈՐԱԿԱ-ԳԾԱՅԻՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԿԻՐԱՌՈՒՄԸ ԳԾԱՅԻՆ ԷԼԵԿՏՐԱԿԱՆ ՇՂԹԱՆԵՐԻ ՀԵՏԱԶՈՏՄԱՆ ՄԵՋ

Ամփոփում

Ցույց է տրվում, որ գծային էլեկտրական շղթաների հանգուցային կոմպլեքս լարումը արտահայտվում է ճյուղի լրիվ (կոմպլեքս) դիմադրության կոտորակա-գծային ֆունկցիայի միջոցով։ Հետևաբար, այն բոլոր հատկությունները, որոնցով օժտված են կոմպլեքս փոփոխականի կոտորակա-գծային ֆունկցիաները, կարելի է վերագրել նաև գծային էլեկտրական շղթաներին։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Максимович М. Г.* Линейные электрические цепи и их преобразование.— М.: Госэнергоиздат, 1961.— 265 с.
2. *Маркушевич А. И., Маркушевич Л. А.* Введение в теорию аналитических функций.— М.: Просвещение, 1977.— 320 с.

Изв. АН АрмССР (сер. ТН), т. XL, № 2, 1987

ТЕХНИЧЕСКАЯ КИБЕРНЕТИКА

А. М. КАРАПЕТЯН, Ф. И. ФИНАЕВ, М. Ф. САРИМАХМУДОВ

ВОЗМОЖНОСТЬ ПРЕДСТАВИМОСТИ МОДЕЛИ ДИСКРЕТНОГО КАНАЛА ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ В ВИДЕ ВЕРОЯТНОГО АВТОМАТА

Общеизвестным моделям каналов передачи дискретной информации (КПДИ) присущи существенные недостатки, связанные с детерминическим подходом, а именно: введение искусственных коэффициентов; невозможность учета медленно меняющихся параметров канала; абстрагирование от реальной помеховой обстановки. Устранить эти недостатки моделей возможно при статистическом подходе и построении модели КПДИ, формально описываемой вероятностным автоматом (ВА).

В настоящее время известен широкий класс представлений ВА [1] для задач моделирования, причем универсальная модель КПДИ может быть реализована на ВА Мура с детерминированными выходами, который функционирует в дискретном времени.

Утверждение 1. Инициальный ВА Мура с детерминированными выходами

$$A = \langle L, Y, \bar{A}, A(l), a_0, \varphi(a) \rangle, \tag{1}$$

где L, Y, $\bar{A}$ — входной, выходной и внутренний алфавиты; $A(l)$ — матрица переходных вероятностей; a_0 — начальное состояние; $\varphi(a)$ — функция выходов, является универсальной автоматной моделью дискретного канала связи.

Доказательство. Утверждать, что ВА является универсальной моделью КПДИ возможно, если: существует идентификация геометрических картин преобразований, осуществляемых КПДИ и ВА; КПДИ описывается полностью стохастическими матрицами, как и ВА; КПДИ эквивалентен и гомоморфен ВА по принципу функционирования.

Рассмотрим геометрическую картину функционирования ВА, которую возможно описать следующим образом:

$$\bar{\mu}(p) = \mu(e) L(p), \quad p \in F_L, \tag{2}$$

где $\bar{\mu}(p) = \mu(a_i/p)$, $a_i \in \bar{A}$ — вектор состояний;

$\bar{\mu}(e) = \mu(a_i)$, $a_i \in \bar{A}$ — стохастический вектор строки.