

О. П. ГАСПАРЯН

ИССЛЕДОВАНИЕ АБСОЛЮТНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ МНОГОСВЯЗНЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ

1. *Введение.* В работе дается распространение метода характеристических передаточных функций (ХПФ) [1] на задачу исследования абсолютной устойчивости нелинейных многосвязных систем автоматического регулирования (МСАР). Показано, что при определенных допущениях можно выразить частотные условия абсолютной устойчивости МСАР непосредственно через характеристические годографы линейной части и придать этим условиям геометрическую интерпретацию, известную по классической теории регулирования.

2. *Абсолютная устойчивость МСАР общего вида. Метод Попова.* Рассмотрим n -мерную нелинейную МСАР на рис. 1, где $W(p)$ — передаточная матрица устойчивой линейной части общего вида, $\text{diag} \{F_i(x_i)\}$ — диагональная матрица нелинейностей, которые для простоты будем считать одноканальными с характеристиками, расположенными в секторах $[0, K_i]$ (рис. 2, а):

$$0 \leq y_i, x_i \leq K_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1)$$

Согласно критерию Попова [2] для абсолютной устойчивости положения равновесия $x \equiv 0$ МСАР на рис. 1 достаточно, чтобы существовала диагональная матрица $\text{diag} \{Q_i\}$ с действительными Q_i такая, что для всех $\omega > 0$ эрмитова матрица

$$\text{Re} P(j\omega) = \frac{1}{2} [P(j\omega) + P^*(j\omega)] \quad (2)$$

являлась бы положительно-определенной (для краткости будем писать $\text{Re} P(j\omega) > 0$), где $*$ — символ сопряжения, а $P(j\omega)$ имеет вид

$$P(j\omega) = [I + j\omega \text{diag} \{Q_i\}] W(j\omega) + \text{diag} \{1/K_i\}. \quad (3)$$

Для выполнения условия $\text{Re} P(j\omega) > 0$ необходимо и достаточно, чтобы были положительными все собственные значения $\mu_i(\omega)$ или главные диагональные миноры $\Delta_i(\omega)$ матрицы $\text{Re} P(j\omega)$ (2). В литературе описаны различные алгебраические методы проверки условий $\mu_i(\omega) > 0$

или $\Delta_r(\omega) > 0$ при заданных Q_i . Среди них наибольшее распространение получили алгоритмический метод Штурма, метод Д. Шильака и некоторые другие [3]. Применение метода Попова в инженерной практике связано с существенными трудностями, поскольку в настоящее время отсутствуют какие-либо регулярные приемы определения оптимальных значений Q_i , исходя из алгебраических критериев положительной определенности матрицы $\operatorname{Re} P(j\omega)$. Не приводит к заметным упрощениям и отмеченный в [3] прием замены диагональной матрицы $\operatorname{diag}\{Q_i\}$ скалярной QI , т. к. и здесь остается открытым вопрос о связи оптимального значения параметра Q с передаточной матрицей $W(p)$ и числами K_i в (1). Ниже будет показано, как можно на базе метода ХПФ придать задаче выбора Q простую и наглядную геометрическую интерпретацию, аналогичную используемой в одномерном случае [4].

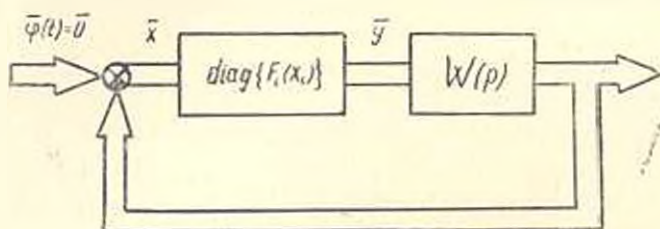


Рис. 1

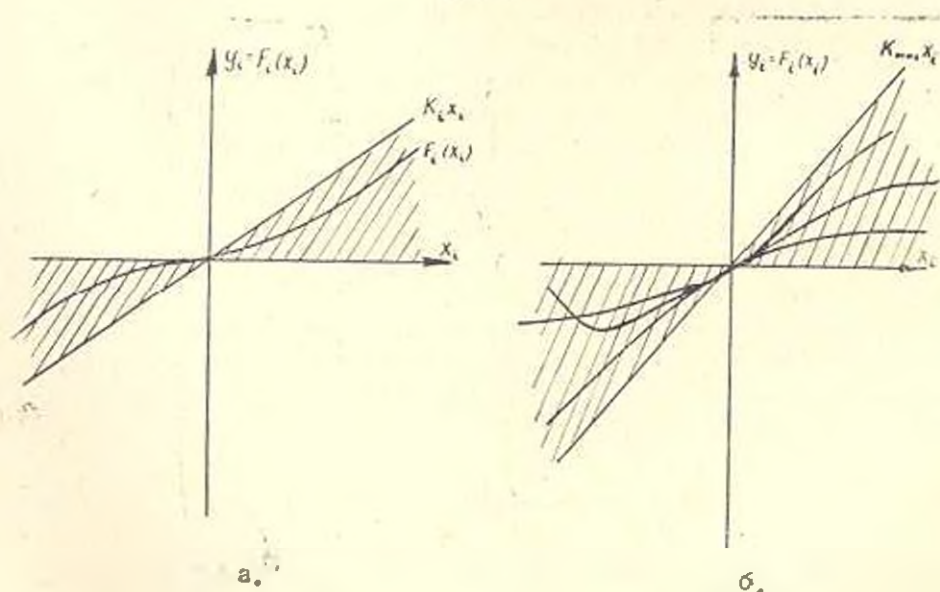


Рис. 2.

Заменяем в (3) матрицу $\operatorname{diag}\{Q_i\}$ скалярной QI , а матрицу $\operatorname{diag}\{1/K_i\}$ - скалярной $(1/K_{max})I$, где $K_{max} = \max |K_i|$. Геометрически последняя операция соответствует введению сектора $[0, K_{max}]$, охватывающего все характеристики нелинейностей $F_i(x_i)$ (рис. 2б). Тогда, воспользовавшись каноническим представлением передаточной матри-

цы линейной части $W(j\omega)$, при помощи преобразования подобия получим:

$$W(j\omega) = C(j\omega) \operatorname{diag} \{q_i(j\omega)\} C^{-1}(j\omega), \quad (4)$$

где $C(j\omega)$ -модальная матрица; $q_i(j\omega)$ -ХГФ линейной части [1]

Матрицу $P(j\omega)$ (3) можно привести к виду

$$P(j\omega) = C(j\omega) \operatorname{diag} \{(1 + j\omega Q) q_i(j\omega) + 1/K_{max}\} C^{-1}(j\omega). \quad (5)$$

Согласно (5) матрица $P(j\omega)$ приводится к диагональному виду в каноническом базисе линейной части, а ее комплексные собственные значения равны

$$\gamma_i(j\omega) = (1 + j\omega Q) (q_i(j\omega) + 1/K_{max}), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (6)$$

На основании известной в теории матриц теоремы Гирша [5] наибольшее и наименьшее значения $\mu_{max}(\omega)$ и $\mu_{min}(\omega)$ из собственных значений $\mu_i(\omega)$ эрмитовой матрицы $\operatorname{Re} P(j\omega)$ строго ограничивают сверху и снизу множество вещественных чисел $\operatorname{Re} |\gamma_i(j\omega)|$:

$$\mu_{min}(\omega) < \operatorname{Re} |\gamma_i(j\omega)| < \mu_{max}(\omega). \quad (7)$$

Однако необходимые и достаточные условия положительной определенности матрицы $\operatorname{Re} P(j\omega)$ (2) заключаются в положительности всех ее собственных значений. С другой стороны, если хотя бы одно из $\operatorname{Re} |\gamma_i(j\omega)| < 0$, то $\mu_{min}(\omega) < 0$. Следовательно, необходимые условия выполнения $\operatorname{Re} P(j\omega) > 0$ запишутся в виде

$$\operatorname{Re} \{(1 + j\omega Q) q_i(j\omega) + 1/K_{max}\} > 0. \quad (8)$$

Условия (8) имеют простой геометрический смысл. Назовем комплексные функции

$$q_i^*(j\omega) = \operatorname{Re} \{q_i^*(j\omega)\} + j \operatorname{Im} \{q_i^*(j\omega)\}, \quad (9)$$

где $\operatorname{Re} \{q_i^*(j\omega)\} = \operatorname{Re} |q_i(j\omega)|$ и $\operatorname{Im} \{q_i^*(j\omega)\} = \omega \operatorname{Im} |q_i(j\omega)|$, модифицированными ХГФ линейной части МСАР. Тогда уравнение

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \{(1 + j\omega Q) q_i(j\omega) + 1/K_{max}\} = \operatorname{Re} |q_i^*(j\omega)| - \\ - Q \operatorname{Im} \{q_i^*(j\omega)\} + 1/K_{max} = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

определяет на комплексной плоскости семейства $|q_i^*(j\omega)|$ прямую линию Π (прямую Попова), проходящую через точку $-1/K_{max}$, $j0$ и имеющую наклон $1/Q$ [4]. Отсюда приходим к выводу, что для $\operatorname{Re} P(j\omega) > 0$ необходимо, чтобы все семейства $|q_i^*(j\omega)|$ модифицированных характеристических годографов линейной части МСАР лежало правее прямой Π (10), т. е. обычный критерий Попова должен выполняться по отношению к каждой из одномерных характеристических систем. Оптимальное значение параметра Q определяется таким накло-

ном прямой II, при котором обеспечивается наибольшее удаление этой прямой от семейства модифицированных годографов $q_i^m(j\omega)$. Выполнение при некотором $Q = \text{const}$ условий (8) еще не гарантирует абсолютную устойчивость положения равновесия МСАР, поэтому выбрав указанным способом оптимальное значение Q , нужно проверить и выполнение условия $\text{Re } P(j\omega) > 0$ стандартными методами [3].

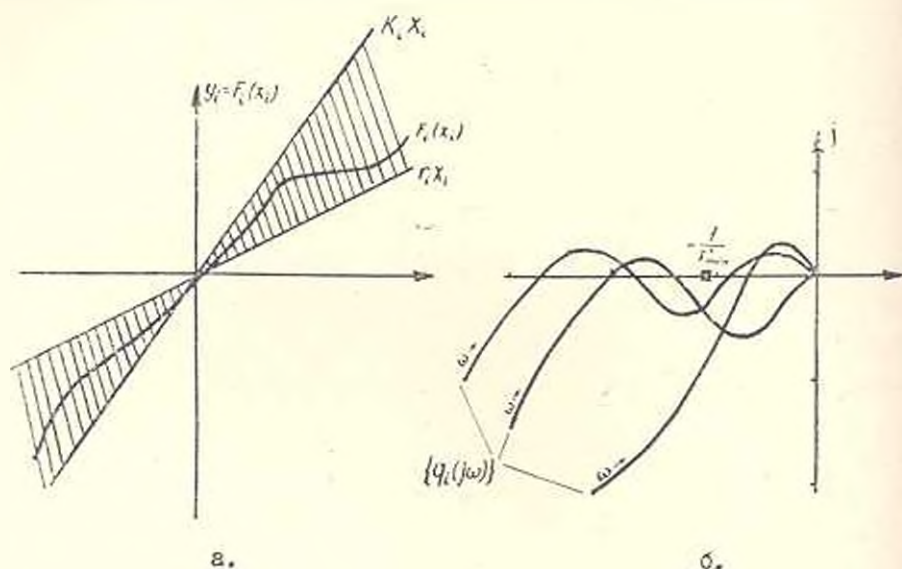


Рис. 3.

3. Внеосевой круговой и параболический критерии абсолютной устойчивости. Перейдем теперь к более общему случаю МСАР с неустойчивой или «условно устойчивой» линейной частью $W(p)$ и нелинейностями, расположенными в секторах $[r_i, K_i]$ (рис. 3а):

$$r_i \leq y_i x_i \leq K_i. \quad (11)$$

Под условно устойчивыми здесь понимаются матрицы $W(j\omega)$ с «ключообразными» характеристическими годографами $q_i(j\omega)$ (рис. 3б).

Данную задачу нетрудно привести к предыдущей. Для этого введем сектор $[r_{min}, K_{max}]$, содержащий все характеристики $F_i(x_i)$, и допустим, что передаточная матрица $W(p)$, охваченная отрицательной обратной связью посредством скалярной матрицы $r_{min} I$, устойчива (рис. 3б). Тогда можно воспользоваться эквивалентным структурным преобразованием МСАР, представленным на рис. 4, где передаточная матрица преобразованной линейной части

$$W_n(p) = [I + r_{min} W(p)]^{-1} W(p) \quad (12)$$

по предположению устойчива, а характеристики $F_i^n(x_i) = F_i(x_i) - r_{min} x_i$ лежат в секторе $[0, K_{max} - r_{min}]$. Как видим, по отношению

к преобразованной МСАР на рис. 4 выполняются все условия применимости критерия Попова в рассмотренной выше форме, причем, в место (8) будем иметь

$$\operatorname{Re} \{(1 + j\omega Q) q_i(j\omega) [1 + r_{\min} q_i(j\omega)] + 1/(K_{\max} - r_{\min})\} > 0. \quad (13)$$

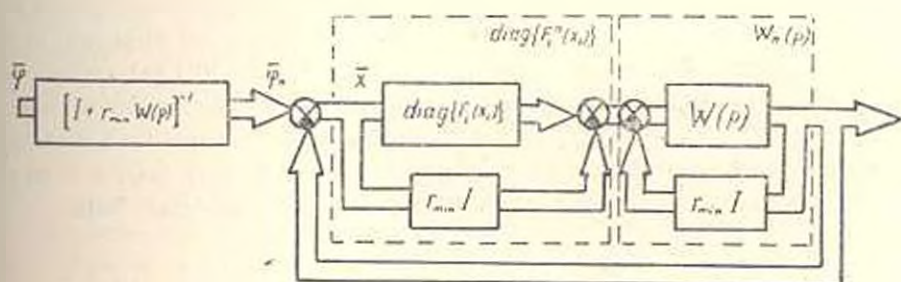


Рис. 4

При этом построении нужно проводить на плоскости модифицированных характеристических годографов $q_{ii}^u(j\omega)$ преобразованной матрицы $W_{\pm}(p)$ (12), что не совсем удобно с практической точки зрения. Поэтому рассмотрим еще один подход, который использует характеристические годографы $q_i(j\omega)$ исходной линейной части и приводит к обобщению на многомерный случай внеосового кругового критерия [4]. Выделив в (13) действительные части, после несложных алгебраических преобразований можно получить

$$\left| \operatorname{Re} \{q_i\} + \left(\frac{K_{\max} + r_{\min}}{2K_{\max} r_{\min}} \right) \right|^2 + \left| \operatorname{Im} \{q_i\} - \omega Q \left(\frac{K_{\max} + r_{\min}}{2K_{\max} r_{\min}} \right) \right|^2 > \left(\frac{K_{\max} - r_{\min}}{2K_{\max} r_{\min}} \right)^2 (1 + \omega^2 Q^2). \quad (14)$$

Но если заменить в (14) знак $>$ на знак равенства, то придем к уравнению окружности на комплексной плоскости семейств $\{q_i(j\omega)\}$ с центром в точке $U(\omega)$ с координатами

$$\operatorname{Re} \{U(\omega)\} = -\frac{1}{2} (1/r_{\min} + 1/K_{\max}), \quad (15)$$

$$\operatorname{Im} \{U(\omega)\} = \frac{1}{2} \omega Q (1/r_{\min} - 1/K_{\max})$$

и радиусом $R(\omega) = \sqrt{1 + \omega^2 Q^2} [(1/r_{\min} - 1/K_{\max})/2]$. Это позволяет дать следующую геометрическую интерпретацию условиям (13). Для положительной определенности матрицы $\operatorname{Re} P(j\omega)$ (2) при некоторой частоте $\omega = \omega_*$ необходимо, чтобы множество n точек на $|q_i(j\omega)|$ при $\omega = \omega_*$ было расположено вне соответствующей окружности с центром

в $U(\omega_k)$ и радиусом $R(\omega_k)$ (рис. 5а), т. е. по отношению к каждому годографу $q_k(j\omega)$ должен выполняться обычный внесосовой круговой критерий [4]. Выбор оптимального значения параметра Q при этом осуществляется, как и в одномерном случае, последовательными приближениями. Аналогично обобщается на многомерный случай и параболический критерий абсолютной устойчивости [4]. Можно показать, что если при некотором $Q = \text{const}$ выполняется внесосовой круговой критерий, то семейство модифицированных годографов $q_k^*(j\omega)$ исходной линейной части МСАР расположено вне параболы, проходящей через точки $-1/r_{\min}$ и $-1/K_{\max}$ на действительной оси, причем касательные к параболе в этих точках имеют наклоны $-1/Q$ и $-1/Q$, т. е. правая касательная совпадает с обычной прямой Попова (рис. 5б).

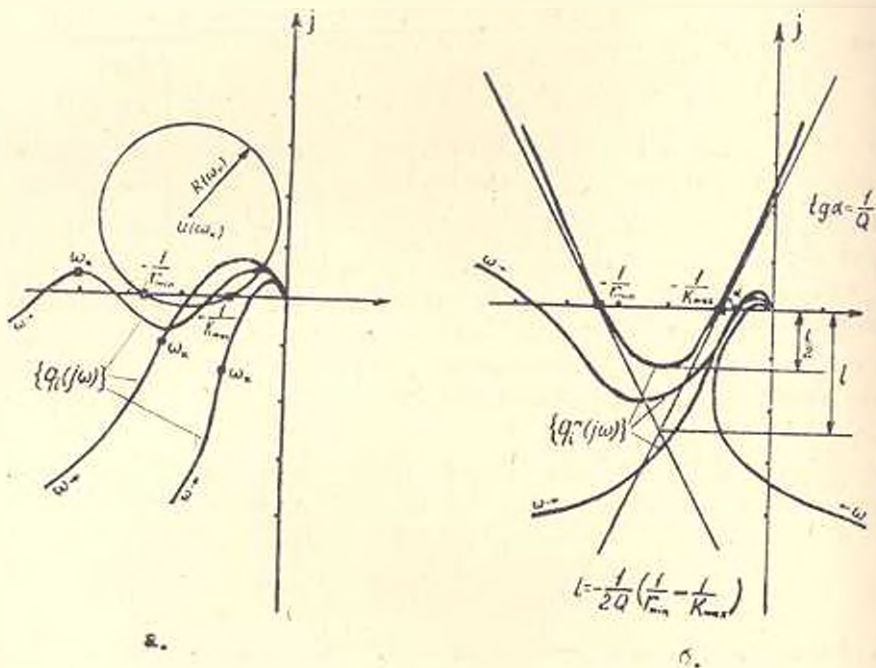


Рис. 5.

26. V. 1983

О. В. ГАБРИЕЛЯН

ԱՉ ԳԻՄՆԱՅԻՆ ԲԱԶՄԱՆՈՒԹՅԱՆ ՀԱՄԱԿԱՐԿԵՐԻ ԲԱՑԱՐՁԱԿԻ ԿՈՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՀԵՏԱԶՈՏՈՒՄԸ ԲՆՈՒԹԱԳՐՈՂ ՓՈԽԱՆՑՄԱՆ ՀՈՒՆՆՅՈՒՆՆԵՐԻ ՈՒԹՈՒՄԸ

Ա Մ Փ Ն Փ Ն Մ

Տրված է բնութագրող փոխանցման ֆունկցիաների մեթոդի տարածումը ոչ դժաշին բաղադրված ադապտիվ կարգավորման համակարգերում (ԲԱԿՀ)

Համաարակշիռության դիրքի և հարկադրական պրոցեսների բացարձակ կայունությունը հետազոտման խնդրի վրա:

Ցույց է տրված, որ սրտչակի էնթադրությունների դեպքում բացարձակ կայունության հաճախային պայմանները կարելի է արտահայտել գծային մասի ընթացող հոդադրաձևերի միջոցով և առաջիկ պայմաններին կարգավորման դասական տեսությունից հայտնի երկրաչափական մեկնարանում: Զեռնվելով էն բացարձակ կայունության արտատունքային շրջանային և պարարոյիկ շափանչները:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Гаспирян О. Н. Исследование автоколебаний в нелинейных многосвязных системах регуляризации методом характеристических предраточных функций.— Изв. АН АрмССР (сер. ТН), 1981, с. XXXVII, № 5, с. 31—39.
2. Методы исследования нелинейных систем автоматического управления /Под ред. Р. А. Нелепина.— М.: Наука, 1975.— 448 с.
3. Миттер В. М. Аналого-цифровые автоматические системы.— Л.: Машиностроение, 1981.— 199 с.
4. Сит Д., Мейер А. Современная теория автоматического управления и ее приложения.— М.: Машиностроение, 1972.— 341 с.
5. Миркус М., Минк Х. Обзор по теории матриц и матричных неравенств.— М.: Наука, 1972.— 232 с.