ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Տեխնիկական գիտութ. սերիա XXXIX, № 3, 1986 Серия технических наук

ТЕХНИЧЕСКАЯ КИБЕРНЕТИКА

Р. Е. ГАСПАРЯН

ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМЫ УБЫВАЮЩЕГО ПОДКРЕПЛЕНИЯ С КОРРЕКЦИЕЙ ОШИБОК

Среди множества задач практики, связанных с распознаванием образов, широко представлены задачи, в которых априорная информация задана в виде обучающей последовательности классифицированных стимулов. В подобных случаях наиболее распространенная формальная постановка задачи обучения распознаванию образов заключается в определении вектора, выбирающего из заданного множества решающих правил такое, которое минимизирует величину среднего риска. Предполагается, что вектор, доставляющий минимум функционалу среднего риска, должен быть найден по обучающей последовательности [1].

Ниже приводится способ решения этой задачи с помощью персептрона, обучаемого с применением системы убывающего подкрепления [2]. Рассматриваются элементарные персептроны, соединенные последовательно с топологической структурой $S-A-R$, где S — сетчатка, A — слой А-элементов, R — реагирующий элемент.

Обозначим через N_a — количество А-элементов персептрона и v^i — i-ую компоненту весового вектора V. Тогда множество решающих правил, реализуемых персептроном, описывается соотношением:

$$D(\psi, V) = Q\left(\sum_i v^i \psi^i\right), \quad i = 1, 2, \ldots, N_a,$$

где

$$Q(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t \geqslant 0, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Выпишем выражение для функционала среднего риска:

$$R(V) = \int \left(\rho - Q\left(\sum_i v^i \psi^i\right)\right)^2 df(\rho, \psi). \tag{1}$$

Здесь ρ — признак класса, принимающий значение 0 или 1, в зависимости от того, к какому классу принадлежит распознаваемый стимул, а областью интегрирования является пространство ρ, ψ, в котором задана вероятностная мера $f(\rho, \psi)$.

Рассмотрим новый функционал

$$R_1(V) = \int G(\rho, \psi, V)\, df(\rho, \psi) \tag{2}$$

с функцией потерь

$$G(\rho, \psi, V) = \begin{cases} \left(\left|\sum_i v^i \psi^i\right| + \sum_i v^i \psi^i\right)/2, & \text{если } \rho = 0, \\ \left(\left|\sum_i v^i \psi^i\right| - \sum_i v^i \psi^i\right)/2, & \text{если } \rho = 1, \end{cases}$$

имеющей обобщенный градиент

$$g(\rho, \psi, V) = \begin{cases} \psi, & \text{при } \rho = 1 \text{ и } \sum_i v^i \psi^i \leqslant 0, \\ 0, & \text{при } \rho = 1 \text{ и } \sum_i v^i \psi^i > 0, \\ -\psi, & \text{при } \rho = 0 \text{ и } \sum_i v^i \psi^i \geqslant 0, \\ 0, & \text{при } \rho = 0 \text{ и } \sum_i v^i \psi^i < 0. \end{cases} \tag{3}$$

Так как функционалы (1) и (2) достигают минимума на общей точке V^*, то целью обучения можно считать определение вектора V^*, доставляющего минимум новому функционалу.

Определим систему убывающего подкрепления с коррекцией ошибок, как метод обучения, при котором веса связей, исходящих от A-элементов к реагирующему элементу, не изменяются, если персептрон правильно распознает стимул обучающей последовательности; если же на i-ом шаге обучения персептрон выработал неправильную реакцию, то веса активных А-элементов изменяются на величину δ_i, причём, знак подкрепления определяется знаком ошибки $|\delta_i| > |\delta_{i+1}|$. Согласно определению, система убывающего подкрепления с коррекцией ошибок реализует рекуррентную процедуру, которая с учетом (3) может быть записана в виде

$$V_i = V_{i-1} + \delta_i g(\rho_i, \psi_i, V_{i-1}) \tag{4}$$

и, следовательно, если в качестве подкрепления δ_i использовать последовательность чисел, удовлетворяющую условиям:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \delta_i = \infty, \quad \sum_{i=1}^{\infty} \delta_i^2 < \infty, \quad \delta_i > 0,$$

то в результате применения процедуры (4) будет построен весовой вектор V^*, минимизирующий функционал (2) [3].

Пусть $\Psi = \{\psi\}$ — бесконечное множество N_a-мерных векторов $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_i, \ldots$, являющееся объединением двух линейно-разделимых подмножеств $\Psi^{(1)} = \{\psi^{(1)}\}$ и $\Psi^{(2)} = \{\psi^{(2)}\}$. Допустим также, что существует точная верхняя граница:

$$\sup_{\psi \in \Psi^{(1)} \cup \Psi^{(2)}} |\psi| = M < \infty. \tag{5}$$

Покажем, что при выполнении этих условий система убывающего подкрепления с коррекцией ошибок позволяет за конечное число шагов обучения построить гиперплоскость, разделяющую множества $\Psi^{(1)}$ и $\Psi^{(2)}$.

Предварительно отметим, что если $\bar{\Psi}^{(2)} = \{\bar{\psi}^{(2)}\}$ — множество векторов, противоположных векторам множества $\Psi^{(2)}$, и $\Phi = \{\varphi\} = \Psi^{(1)} \cup \bar{\Psi}^{(2)}$, то задачу построения гиперплоскости, разделяющей множества $\Psi^{(1)}$ и $\Psi^{(2)}$, можно трактовать как задачу формирования весового вектора V, удовлетворяющего системе неравенств:

$$\sum_i \varphi^i v^i > 0 \quad \text{для всех} \quad \varphi \in \Phi. \tag{6}$$

Предъявим персептрону стимул φ_j. Согласно введенному выше определению системы убывающего подкрепления с коррекцией ошибок, значение весового вектора V_j при этом описывается выражением:

$$V_j = \begin{cases} V_{j-1} + \delta_j \varphi_j, & \text{если } \sum_i \varphi_j^i v_{j-1}^i \leqslant 0; \\ V_{j-1}, & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{7}$$

Допустим, что предъявление стимула φ_j влечет за собой коррекцию весового вектора. Тогда из (7) получаем:

$$|V_j|^2 = |V_{j-1}|^2 + 2\delta_j \sum_i \varphi_j^i v_{j-1}^i + \delta_j^2 |\varphi_j|^2$$

и далее, учитывая (5) —

$$|V_j|^2 \leqslant |V_{j-1}|^2 + M^2 \delta_j^2. \tag{8}$$

Из (8) следует, что если начальное значение весового вектора $V_0 = 0$ и к моменту времени t было выполнено m коррекций, то:

$$|V_t|^2 \leqslant M^2 \sum_{j=1}^{m} \delta_j^2. \tag{9}$$

Оговоренная выше линейная разделимость множеств $\Psi^{(1)}$ и $\Psi^{(2)}$ свидетельствует о существовании некоторого единичного вектора V_E, удовлетворяющего системе неравенств:

$$\sum_i \varphi^i v_E^i \geqslant d_0 \quad \text{для всех} \quad \varphi \in \Phi, \tag{10}$$

где положительная величина d_0 выражает расстояние от начала координат до выпуклой оболочки множества Φ.

Если при использовании системы убывающего подкрепления с коррекцией ошибок к моменту времени t было выполнено m коррекций, то посредством несложных преобразований, учитывающих соотношения (7) и (10), можно получить следующую оценку величины $\sum_i v_i^t v_E^t$:

$$\sum_{i=1}^{N_a} v_i^t v_E^t \geqslant d_0 \sum_{j=1}^{m} \delta_j . \tag{11}$$

Записав неравенство Коши-Буняковского для векторов V_t и V_E, после очевидных преобразований получим:

$$\left|\sum_i v_i^t v_E^t\right|^2 \leqslant \sum_i |v_i^t|^2 \sum_i |v_E^t|^2 = |V_t|^2 |V_E|^2 = |V_t|^2,$$

откуда

$$|V_t| \geqslant \sum_i v_i^t v_E^t ,$$

и далее, учитывая (11):

$$|V_t|^2 \geqslant d_0^2 \left(\sum_{j=1}^{m} \delta_j\right)^2 . \tag{12}$$

Рассматривая совместно неравенства (9) и (12), окончательно получаем:

$$\left(\sum_{j=1}^{m} \delta_j\right)^2 / \sum_{j=1}^{m} \delta_j^2 \leqslant M^2/d_0^2 . \tag{13}$$

Пусть величина подкрепления δ_j убывает от шага к шагу по экспоненциальному закону $\delta_j = \exp(-cj)$, $c > 0$. Так как

$$\sum_{j=1}^{m} \delta_j = (\exp(-cm) - 1)/(1 - \exp(c))$$

и

$$\sum_{j=1}^{m} \delta_j^2 = (\exp(-2cm) - 1)/(1 - \exp(2c)),$$

то соотношение (13) принимает вид:

$$(\exp(-cm) - 1)(1 + \exp(c))/((\exp(-cm) + 1)(1 - \exp(c))) \leqslant M^2/d_0^2 .$$

Разрешая последнее неравенство относительно m, получаем верхнюю оценку количества шагов обучения персептрона для случая системы убывающего подкрепления экспоненциального типа:

$$\left|\begin{array}{l} m \leqslant (\ln((\exp(c) + 1 - M^2/d_0^2 + \exp(c) M^2/d^2)/(\exp(c) + 1 + \\ \qquad + M^2/d_0^2 - \exp(c) M^2/d_0^2)))/c, \\ 0 < c < \ln(((M^2/d_0^2) + 1)/((M^2/d_0^2) - 1)). \end{array}\right.$$

Воспользуемся теперь соотношением (13) для оценки количества шагов процедуры обучения персептрона под управлением системы убывающего подкрепления ступенчатого типа [2]. Имея ввиду, что в данном случае величина подкрепления описывается выражением $\delta_j = c\,(m-j+1)/m$, после несложных преобразований получаем:

$$\sum_{j=1}^{m} \delta_j = \frac{c\,(m+1)}{2}, \qquad \sum_{j=1}^{m} \delta_j^2 = \frac{c^2\,(m+1)(2m+1)}{6m}. \tag{14}$$

Далее, (13) с учетом (14) можно упростить к виду:

$$1{,}5m\,(m+1)/(2m+1) \leqslant M^2/d_0^2,$$

откуда окончательно получим:

$$m \leqslant \frac{4}{3} M^2/d_0^2.$$

На основании рассмотренных примеров можно заключить, что с помощью соотношения (13) аналогичным образом может быть исследована сходимость других алгоритмов метода убывающего подкрепления с коррекцией ошибок. Наконец отметим, что при постоянной величине подкрепления $\delta_j = \mathrm{const}$, характеризующей α -систему обучения, из (13) получаем: $m \leqslant M^2/d_0^2$, что согласуется с оценкой [4] для α -персептрона.

ИПО КЦ АН АрмССР 25.V.1983

Ռ. Ե. ԳԱՍՊԱՐՅԱՆ

ՍԽԱԼԻ ԿԱՆՈՆԱՎՈՐՄԱՄԲ ՆՎԱԶՈՂ ԱՄՐԱՑՄԱՆ ՀԱՄԱԿԱՐԳԻ ՀԵՏԱԶՈՏՈՒՄԸ

Ամփոփում

Կերպարների ճանաչման ուսուցումը դիտվում է որպես միջին ռիսկի մինիմիզացիայի խնդիր: Բերվում է խնդրի լուծման եղանակը պերսեպտրոնի միջոցով, որն ուսուցվում է սխալի կանոնավորմամբ նվազող ամրացման համակարգի կիրառումով: Արտածված է բանաձև, որը թույլ է տալիս գծայնորեն անջատվող դասերի համար որոշել ուսուցման քայլերի վերին սահմանը:

ЛИТЕРАТУРА

1. *Патрик Э.* Основы теории распознавания образов. — М.: Советское радио, 1980. — 408 с.
2. *Диян С. В., Гаспарян Р. Е.* Об одной системе подкрепления элементарного персептрона. — М., 1975. — 9 с. — Рукопись представлена ЕрНИИММ. Деп. в ЦНИИЭИР 1976, № 4868.
3. *Вазан М.* Стохастическая аппроксимация. — М.: Мир, 1972. — 296 с.
4. *Novikoff A.* On convergense proofs for perceptrons. — In: Proceedings of Symposium on Mathematical Theory of Automata. — New York: Polytechnic Institute of Brooklyn, 1963, v. XII, p. 109—112.