

ГИДРАВЛИКА

А. М. БАРХУДАРЯН

К ВОПРОСУ О ПОТЕРЯХ НАПОРА ПРИ НЕУСТАНОВИВШЕМСЯ
ЛАМИНАРНОМ ДВИЖЕНИИ ЖИДКОСТИ

Исследование неустановившегося ламинарного движения вязкой несжимаемой жидкости в жесткой цилиндрической трубе является одной из сложных и практически важных задач механики [1, 2]. Получены закономерности изменения расхода и профиля скоростей в зависимости от закона изменения перепада давления, решения которых содержат функции Бесселя и справедливы лишь при заданной закономерности изменения перепада давления. Использование этих решений в случаях, когда рассматривается неустановившееся ламинарное движение в отдельных участках системы гидродинамического нивелирования или в трубах гидропривода, затруднено в связи с изменением функции изменения перепада давления или расхода по времени.

С целью повышения производительности и точности измерения гидродинамическим нивелиром [3] необходимо изучить изменение средней скорости движения жидкости в отдельных участках системы. Это возможно при решении соответствующей системы уравнений, в которую входят также уравнения одномерного неустановившегося движения вязкой капельной жидкости, написанные для отдельных участков трубопровода. Экспериментально и теоретически доказано, что при ускоренном движении потери напора в каждый момент времени больше, чем величина потерь, соответствующая квазистационарному течению. Относительно потерь в замедляющих течениях существует противоречивость [4].

Целью настоящей работы является получение зависимого для определения потерь напора при неустановившемся ламинарном движении капельной жидкости в круглых трубах. При этом, наряду с появлением потерь напора при квазистационарном течении, существует и другая причина, чем и обусловлено предполагаемое отличие величины потерь [5]. Здесь под квазистационарным течением подразумевается такое установившееся движение, когда средняя скорость потока равна мгновенной скорости неустановившегося движения, а под псевдоустановившимся течением — такое стационарное течение, когда в живом сечении потока профиль скоростей аналогичный для данного момента неустановившегося движения.

Написав уравнение одномерного неустановившегося движения относительно двух сечений трубы постоянного диаметра, получим:

$$H = h_{\text{ну}} + h_{\text{ик}} + h_{\text{из}}, \quad (1)$$

где H — перепад давления между двумя сечениями; $h_{\text{ну}}$ — потери напора в данный момент времени; $h_{\text{ик}}$ — инерционный напор квазистационарного движения; $h_{\text{из}}$ — дополнительный инерционный напор, обусловленный деформацией профиля местных скоростей.

Обычно принято связывать потери напора только силами действующими на боковую поверхность потока, но это справедливо лишь при установившемся движении. При псевдоустановившемся движении оно не применимо из-за отличия профиля скоростей от случая квазистационарного движения с одинаковой средней скоростью.

Экспериментальные и теоретические исследования показывают, что при неустановившемся движении жидкости в трубе происходит перестроение профиля местных скоростей. При псевдоустановившемся течении потери будут обусловлены не только касательными напряжениями на границах потока, но и законом его изменения в самом потоке.

Рассмотрим нестационарное ламинарное течение вязкой жидкости в неограниченной круглой трубе радиуса R , для чего выделим полый цилиндр с внутренним радиусом r , толщиной стенки dr и высотой u (рис.). На внутренней поверхности касательное напряжение τ совпадает с направлением движения жидкости, а на внешней поверхности направлено против течения и определяется по формуле:

$$\tau = -\rho \nu \frac{\partial u}{\partial r}, \quad (2)$$

где ν — кинематический коэффициент вязкости; ρ — плотность жидкости; u — скорость в текущей точке.

Величина касательного напряжения на внешней поверхности цилиндра равна $\tau + \frac{\partial \tau}{\partial r} dr$. Энергия, которая затрачивается на перемещение выделенного элемента на путь длиной l :

$$dN = 2\pi a l \left(r \frac{\partial \tau}{\partial r} + \tau \right) dr,$$

а вес жидкости, ограниченной в выделенном элементе —

$$dG_1 = 2\pi \rho g a r dr.$$

Потери удельной энергии в данной трубке тока на пути l равны:

$$h = \frac{dN}{dG} = -\nu \frac{l}{g} \left(\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right). \quad (3)$$

Средние потери удельной энергии (потери напора) псевдоустановившегося движения определяются по формуле:

$$h_{uy} = - \frac{2lv}{gR^3v} \int_0^R u \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) r dr, \quad (4)$$

где v — средняя скорость движения жидкости в живом сечении в данный момент времени.

Теперь рассмотрим течение вязкой несжимаемой и ненагрываемой жидкости в круглой, горизонтально расположенной трубе. Полагая, что движение ламинарное, будем иметь: $u_r = u_z = 0$. Из уравнения неразрывности следует, что условие, $u_x = u$ не зависит от x , тогда уравнения движения в цилиндрических координатах, если пренебречь массовыми силами, примут вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right); \\ \frac{\partial p}{\partial r} &= 0; \quad \frac{\partial p}{\partial \phi} = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Из (5) следует, что перепад давления на единицу длины $p' = \partial p / \partial x$ не зависит от координат и в общем случае может быть только заданной функцией времени t . Из (4) с учетом (5) получаем:

$$h_{uy} = - \frac{l}{gA_0v} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial t} \int_{A_0} u^2 dA + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \int_{A_0} u dA \right]. \quad (6)$$

Учитывая, что

$$\int_{A_0} u dA = v\pi R^2, \quad \int_{A_0} u^2 dA = \alpha_0 v^2 \pi R^2,$$

где α_0 — коэффициент количества движения, из (6) получаем:

$$- \frac{l}{g} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = h_{uy} + \frac{l}{g} \frac{v}{2} \frac{d\alpha_0}{dt} + \alpha_0 \frac{l}{g} \frac{dv}{dt}. \quad (7)$$

Если в момент времени t перепад пьезометрической линии между двумя живыми сечениями, которые удалены на расстояние l , равен H , то

$$H = - \frac{l}{g} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (8)$$

С учетом (8) из (7) получаем уравнение одномерного неустановившегося движения, написанного относительно двух живых сечений трубы постоянного диаметра

$$H = h_{uy} + \alpha_0 \frac{l}{g} \frac{dv}{dt} + \frac{l}{g} \frac{v}{2} \frac{d\alpha_0}{dt} \quad (9)$$

или

$$H = h_{uy} + h_{ia},$$

где h_{ia} — инерционный напор псевдоустановившегося движения [5]:

$$h_{ia} = \alpha_0 \frac{l}{g} \frac{dv}{dt} + \frac{l}{g} \frac{v}{2} \frac{d\alpha_0}{dt}. \quad (10)$$

Из сопоставления (1) и (10) следует, что при неустановившемся движении по сравнению с квазистационарным появляется дополнительный инерционный напор, определяемый по формуле

$$h_{ia} = \frac{l}{g} \frac{v}{2} \frac{d\alpha_0}{dt}. \quad (11)$$

При наклонной трубе вместо первого уравнения системы (5) получим:

$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial x} + g \frac{dz}{dx} = \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right).$$

Нетрудно убедиться, что и при этом снова получается уравнение (9).

Из (9) следует, что величина потерь напора при неустановившемся движении отличается от его значения, соответствующего квазистационарному течению, когда средняя скорость потока равна мгновенной скорости данного движения, по двум причинам:

а) при той же средней скорости потери напора псевдоустановившегося и соответствующему ему квазистационарного движения отличаются из-за различия профилей скоростей;

б) при неустановившемся движении появляется дополнительный инерционный напор [5].

Как следует из (11), причиной возникновения дополнительного инерционного напора является изменение эпюры скоростей в живом сечении. В полученной формуле она отражается изменением коэффициента α_0 . Величина и знак h_{ia} обусловлены характером изменения коэффициента α_0 , что, в свою очередь, зависит от изменения перепада давления и профиля скоростей в начальный момент времени $t = 0$. Функцию изменения коэффициента количества движения при заданном законе изменения напора и начальных условиях задачи можно легко реализовать на ЭВМ. Следовательно, по формуле (9) можно вычислить потери напора при неустановившемся движении. При инженерных расчетах, воспользовавшись графиком изменения коэффициента количества движения, для определения зависимости α_0 от t можно выбрать подходящую аппроксимирующую функцию, что облегчит использование (9).

ՀԵՂՈՒԿԻ ԼԱՄԻՆԱՐ ՉԶԱՍՏԱՏՎԱԾ ՇԱՐԹՈՒՆ ԳԵՊԳՈՒՄ ՃՆՇՄԱՆ ԿՈՐՈՒՍՏՆԵՐԻ ՀԱՐՑԻ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո լ մ

Ուսումնասիրված է հեղուկի լամինար չհաստատված շարժումը հաստատուն տրամագծով խողովակում և դիտարկված դեպքի համար ստացված է էներգիայի կորուստների որոշման բանաձև: Ցույց է տրված, որ չհաստատված շարժման դեպքում էներգիայի կորուստները տարրերվում են կեղծ հաստատված շարժման էներգիայի կորուստներից արագությունների էպյուրի տարբերության և նրա ձևափոխության հետևանքով առաջացող լրացուցիչ իներցիոն էջքի պատճառով:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Громский И. С. Движение жидкости в узких цилиндрических трубах — Собр. соч.: т. 1. — М.: Изд-во АН СССР, 1952. — 296 с.
2. Пакчурин И. А. Некоторые вопросы теоретического и экспериментального исследования неустойчивого движения жидкости в трубах. Автореф. Дис. докт. техн. наук. — Л., 1964. — 25 с.
3. Монсесян Р. А., Бархударян А. П. Теоретические основы метода гидродинамического нивелирования. Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 1976, № 1, с. 9—14.
4. Медкнян Г. И. Некоторые теоретические и прикладные вопросы неустойчивого течения жидкости: Автореф. Дис. докт. техн. наук. — Л., 1971. — 43 с.
5. Попов Д. Н. Нестационарные гидромеханические процессы — М.: Машиностроение, 1982. — 240 с.