ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Տեխնիկական գիտութ. սերիա XXXIX, № 2, 1986 Серия технических наук

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА

К. А. АБГАРЯН, В. Н. АЙРАПЕТЯН, Ю. Н. АЙРАПЕТЯН

ОПТИМИЗАЦИЯ ОЦЕНКИ ПРИБЛИЖЕННОГО АНАЛИТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ПУТЕМ СОВМЕЩЕНИЯ МАЖОРАНТЫ И МИНОРАНТЫ НА СВОБОДНО ПЕРЕМЕЩАЮЩЕЙСЯ ГРАНИЦЕ

Как показано в [1], при распространении тепла (вещества) в неограниченную или полуограниченную среды, а также на начальных этапах процесса распространения требование конечной скорости распространения возмущения однозначно приводит к «занулению» коэффициента температуропроводности (диффузии) на «краю» возмущенной области. В связи с этим уравнение теплопроводности становится в указанных случаях существенно нелинейным и возникает необходимость исследования уравнений теплопроводности с «зануляющимся на краю» коэффициентом температуропроводности.

Цель работы — описание процесса распространения тепла (вещества, посредством диффузии) в полуограниченную среду в одномерном случае, когда в начальный момент времени в начальной точке температура скачкообразно повышается до определенного значения T_0 и поддерживается в дальнейшем постоянной. При этом коэффициент температуропроводности считаем зависящим от температуры, т. е. рассматриваем нелинейный процесс. В отличие от [2] в данной работе исследуется математическая модель процесса, в которой коэффициент переноса (температуропроводности) обращается в нуль.

Как известно, процесс распространения тепла описывается уравнением теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\lambda}{c_v}\cdot\frac{\partial T}{\partial x}\right] = 0, \tag{1}$$

где $c_v = \mathrm{const}$ — объемная теплоемкость; λ — коэффициент теплопроводности; λ/c_v — коэффициент температуропроводности. Область B изменения аргументов t, x определяется следующим образом: на свободно перемещающейся границе решение должно обращаться в нуль (рис. 1).

Наша цель — получить приближенное решение, поэтому отметим, что уравнение (1) удовлетворяет принципу монотонности для парабо-

лических уравнений [2, 3] и это будет использовано для получения «коридора», в котором заключено точное решение уравнения (1). Очевидно, что не может быть общего критерия, который позволил бы указать класс функций, наиболее пригодный в качестве приближенного решения до его получения. Следуя подходу, изложенному в [4,5], можно показать, что исследуемая задача в окрестности нуля и при большом отрезке времени имеет точное решение логарифмического вида. Поэтому приближенное решение во всей области изменения аргументов целесообразно искать в виде функции:

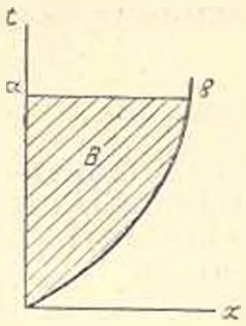

Рис. 1. Область B изменения аргументов t, x

$$c(x, t) = c(y) = 1 + \alpha \ln(1 + ky), \qquad (2)$$

где

$$c = \frac{T(x, t)}{T_0}; \qquad (3)$$

$$y = x/2\sqrt{\frac{\lambda_0}{c_v} t}; \qquad (4)$$

$\lambda_0 = \lambda(T)|_{T=0}$: $\alpha = \text{const} > 0$; $k = \text{const} < 0$ (α и k определим ниже).

Подстановка (2)—(4) в (1) приводит к уравнению

$$\bar{L}c = -\frac{1}{4t}[2yc'_y + g'_c(c)(c'_y)^2 + g(c)c'_{yy}] = \frac{(c'_y)^2}{4t} M(y). \qquad (5)$$

где

$$M(y) = -\frac{2y}{c'_y} - A + \frac{Ac}{\alpha} = \frac{2y(1 + ky)}{\alpha k} - A + \frac{A}{\alpha} + A \ln(1 + ky). \qquad (6)$$

В (5) имеем безразмерный коэффициент температуропроводности $g(c) = Ac$ ($A = 0{,}5$). Так как на свободной границе c обращается в нуль, а это возможно при некотором значении $y = \gamma$, определяемом через α_1 и k, то свободная граница оказывается перемещающейся по закону (рис. 1)

$$x = 2\gamma\sqrt{\frac{\lambda_0}{c_v} t}. \qquad (7)$$

Из (5) очевидно, что Lc в области B имеет тот же знак, что и $M(y)$ при $0 < y < \gamma$. Исследуем $M(y)$:

$$\frac{dM}{dy} = -\frac{2}{\alpha k} - \frac{4y}{\alpha} + \frac{Ak}{1 + ky}; \qquad (8)$$

$$\frac{d^2M}{dy^2} = -\frac{4}{\alpha} - \frac{Ak^2}{(1 + ky)^2}. \qquad (9)$$

Из (9) очевидно, что $\frac{d^2M}{dy^2} < 0$ при $\alpha > 0$, $A > 0$ и любых $y > 0$.

Если $\frac{dM}{dy} = 0$ при некотором y_1 ($0 < y_1 < \gamma$), то это будет макси-

мальным значением $M(y)$. Наименьших же значений функция $M(y)$ будет достигать при $y=0$ и $y=\gamma$. Если же точка экстремума y_0 находится вне интервала $[0, \gamma]$, то наибольшее и наименьшее значения $M(y)$ принимает на концах интервала. Для того, чтобы выполнялось условие

$$\bar{L}c_+(x, t) \leqslant 0 \tag{10}$$

в области B, то согласно (5) необходимо и достаточно выполнения

$$\inf M(y) \geqslant 0, \tag{11}$$

т. е.

$$M(0) = -A - \frac{A}{\alpha_+} \geqslant 0, \tag{12}$$

$$M(\gamma) = -\frac{2\gamma}{k_+ \alpha_+}(1 - k_+\gamma) - A \geqslant 0. \tag{13}$$

Кроме выполнения (12), (13) по определению свободной границы, решение $c_+(x, t)$ должно на ней обращаться в нуль:

$$c_+(x, t) = c_+\left(\frac{x}{2\sqrt{\frac{k_0}{c_0}t}}\right) = c_+(y)\Big|_{y=\gamma} = 1 + \alpha_+ \ln(1 + k_+\gamma) = 0. \tag{14}$$

Отметим, что при $\alpha_+ = 1$ выполняется условие (12). Можно показать, что

$$\gamma^2 \geqslant \frac{A\alpha_+}{2}\left|\exp\left(\frac{1}{\alpha_+}\right) - 1\right| = 0{,}4296 \tag{15}$$

и k_+, получаемое подстановкой $\gamma = 0{,}66$, которое удовлетворяет (15) совместно с α_+, после подстановки в (14) определяет функцию

$$c_+(y) = 1 + \ln(1 - 0{,}9578y), \tag{16}$$

которая обеспечит выполнение (10) в области B. Можно показать, что $\gamma = 0{,}66$ является нижней границей всех γ, для которых еще возможно выполнение условия (10) для всех функций вида (2).

Для того, чтобы выполнялось условие

$$Lc_-(x, t) \leqslant 0 \tag{17}$$

в области B, необходимо и достаточно, чтобы

$$\sup M(y) \leqslant 0. \tag{18}$$

Параметры α_- и k_- подберем таким образом, чтобы своего максимального значения функция $M(y)$ достигла на свободной границе при $\gamma = 0{,}66$:

$$\frac{dM}{dy}\Big|_{y=\gamma} = -\frac{2}{\alpha_- k_-} - \frac{k_-}{\alpha_-} + \frac{Ak_-}{1 - k_-\gamma} = 0; \tag{19}$$

$$|M(y)|_{max} = M(\gamma) = -\frac{2\gamma}{\dots}(1 + k_{-\gamma}) - A \leqslant 0. \qquad (20)$$

В (20) уже использовано условие обращения в нуль на свободной границе, т. е.

$$c_-(x, t) = c_-(y)_{y=\gamma} = 1 + \varkappa_- \ln(1 + k_-\gamma) = 0. \qquad (21)$$

Из (19)—(21) после преобразований получим:

Рис. 2. 1 — функция $c_+(y)$. 2 — функция $c_-(y)$.

$$\varkappa_- = 2{,}4666; \qquad k_- = -0{,}505.$$

Таким образом, можно утверждать, что функция

$$c_-(y) = 1 + 2{,}4666 \ln(1 - 0{,}505) \qquad (22)$$

обеспечит выполнение (17) в области B. Согласно принципу монотонности точное решение $C(x, t)$ удовлетворит неравенствам [2, 3]:

$$c_-(x, t) \leqslant c(x, t) \leqslant c_+(x, t). \qquad (23)$$

Максимальная же погрешность, т. е. максимум выражения

$$\Delta c(x, t) = c_+(x, t) - c_-(x, t) \qquad (24)$$

оказывается равной 0,073 (рис. 2).

В заключение отметим, что «хорошее» нулевое приближение к решению нелинейной задачи является необходимым условием эффективного применения уже разработанных численных методов решений уравнений (например, метода последовательных приближений, метода сплайнов и т. д.). Поэтому, как отмечено в [2], предложенный выше подход в сочетании с численными методами должен оказаться еще более продуктивным.

ВЦ АН АрмССР, ЕГУ

5. VI. 1984

Կ. Ա. ԱՐԳԱՐՅԱՆ, Վ. Ն. ՀԱՅՐԱՊԵՏՅԱՆ, Տաւ. Ն. ՀԱՅՐԱՊԵՏՅԱՆ

ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ՊԱՐԱԲՈԼԱԿԱՆ ՀԱՎԱՍԱՐՄԱՆ ՄՈՏԱՎՈՐ ԱՆԱԼԻՏԻԿԱԿԱՆ ԼՈՒԾՄԱՆ ԳՆԱՀԱՏԱԿԱՆԻ ՕՊՏԻՄԻԶԱՑՈՒՄԸ ԱԶԱՏ ՏԵՂԱՓՈԽՎՈՂ ՍԱՀՄԱՆԻ ՎՐԱ ՄԱԺՈՐԱՆՏԻ ԵՎ ՄԻՆՈՐԱՆՏԻ ՀԱՄԱՏԵՂՄԱՆ ՄԻՋՈՑՈՎ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Դիտարկված է ջերմության (նյութի) տեղափոխման երևույթը կիսատարածնափակ միջավայրում այն դեպքի համար, երբ տեղափոխման գործակիցը ջերմության զծային ֆունկցիան է ժամանակի ցանկացած մոմենտի համար

կարելի է ցուց տալ տիրույթ, որին չկրճատության գրգռումը դեռ չի հասել։ Դարնված է գրգռման և ոչ գրգռման տիրույթների միջև սահմանների տեղափոխումը նկարագրող օրենքը։ Բերված են մոտավոր վերլուծական արտահայտություններ, որոնք հանդիսանում են ոչ գծային պարաբոլական հավասարման ճշգրիտ լուծման մաժորանտը և մինորանտը։ Իրականացված է նրանց օպտիմիզացումն այնպես, որ սահմանի վրա մաժորանտը և մինորանտը համընկնում են։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Айрапетян В. Н., Айрапетян Ю. Н.* Поведение коэффициента диффузии на «краю» расплывающегося облака частиц.—ДАН АрмССР. 1985. т. LXXXI, вып. 1, с. 35—39.
2. *Айрапетян В. Н., Айрапетян Ю. Н.* Оценка решения нелинейного уравнения теплопроводности с коэффициентом, линейно зависящим от температуры.— ДАН АрмССР. 1983, т. LXXVII, вып. 1, с. 40—44.
3. *Коллатц Л.* Функциональный анализ и вычислительная математика.— М.: Мир, 1969.— 447 с.
4. *Айрапетян В. Н., Айрапетян Ю. Н.* Расчет распределения примеси при концентрационной зависимости коэффициента диффузии сведением исходного нелинейного уравнения к более простому.— Физика металлов и металловедение, 1985, 59, вып. 1, с. 32—35.
5. *Айрапетян В. Н., Айрапетян Ю. Н.* Оценка сверху на решение нелинейного уравнения теплопроводности с коэффициентом теплопроводности, изменяющимся с температурой по произвольному степенному закону.— В сб.: Ученые записки ЕГУ, Физика, 1985, № 2, с. 55—62.