ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Տեխնիկական գիտութ. սերիա XXXIX, № 1, 1986 Серия технических наук

НАУЧНЫЕ ЗАМЕТКИ

Э. В. КАРСЛЯН, В. Г. АЛЕКСАНДРЯН

ОПИСАНИЕ И АНАЛИЗ МНОГОМЕРНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ НА ОСНОВЕ ГЛАВНЫХ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ И НАПРАВЛЕНИЙ

Рассмотрим соотношения «вход—выход» линейной непрерывной многомерной системы автоматического управления (МСАУ) с постоянными параметрами:

$$y(s) = W(s)\, r(s), \tag{1}$$

где $y(s)$ и $r(s)$ — m-мерные вектор-столбцы преобразований Лапласа соответственно входных и выходных сигналов сепаратных каналов; $W(s)$ — матричная передаточная функция (МПФ), элементы которой являются дробно-рациональными функциями комплексной переменной s. МПФ $W(s)$ при каждом s можно трактовать как матрицу линейного оператора $\tilde{W}(s)$, который назовем операторной передаточной функцией (ОПФ).

Известно [1], что любому линейному оператору $\tilde{W}(s)$ соответствуют единственный сопряженный оператор $\tilde{W}^*(s)$ и эрмитовые операторы $\tilde{W}^*(s)\,\tilde{W}(s)$ и $\tilde{W}(s)\,\tilde{W}^*(s)$ с ортонормированными системами собственных векторов:

$$\{\tilde{v}^{(1)}(s),\ \tilde{v}^{(2)}(s),\ \dots,\ \tilde{v}^{(m)}(s)\}; \tag{2}$$

$$\{\hat{z}^{(1)}(s),\ \hat{z}^{(2)}(s),\ \dots,\ \hat{z}^{(m)}(s)\}, \tag{3}$$

которые назовем главными входными и выходными направлениями $\tilde{W}(s)$. Известно также [2], что любому оператору $\tilde{W}$ в m-мерном комплексном пространстве соответствуют комплексные числа $\{\hat{w}_1, \hat{w}_2, \dots, \hat{w}_m\}$, такие, что

$$\tilde{W}\tilde{v}^{(i)} = \hat{w}_i\, \hat{z}^{(i)}, \qquad i = 1, 2, \dots, m \tag{4}$$

причем, $\sqrt{\hat{w}_i\, \bar{\hat{w}}_i}$ — так называемые, сингулярные числа [1].

Разлагая входной и выходной векторы $r(s)$ и $y(s)$ соответственно в главных входных и выходных направлениях, с учетом (4) получаем:

$$y(s) = \sum_{i=1}^{m} \langle r(s),\ \bar{v}^{(i)}(s) \rangle \, \bar{w}_i(s), \tag{5}$$

где $\langle a,\ b \rangle = b^* a$ — скалярное произведение. Таким образом, линейная МСАУ в главных направлениях ведет себя как одномерная система с передаточной функцией $\hat{w}_i(s)$, называемой i-ой главной передаточной функцией (ГПФ).

Согласно (5), i-ая ГПФ представляет собой отношение координаты выходного вектора $y(s)$ по i-ому главному выходному направлению $\bar{z}^{(i)}(s)$ к координате входного — $r(s)$ по i-ому главному входному направлению $\bar{v}^{(i)}(s)$ [3], т. е.

$$\tilde{w}_i(s) = \frac{\langle y(s),\ \bar{z}^{(i)}(s) \rangle}{\langle r(s),\ \hat{v}^{(i)}(s) \rangle}, \qquad \langle r(s),\ \bar{v}^{(i)}(s) \rangle \neq 0, \quad \forall_i,\ \forall_s, \tag{6}$$

Обозначив через $\bar{V}(c)$ и $\hat{Z}(s)$ матрицы, составленные из вектор-столбцов главных входных и выходных направлений соответственно, условие (5) можно записать в виде:

$$y(s) = \hat{Z}(s) \operatorname{diag}\{\hat{w}_i(s)\} \, \bar{V}^*(s) \, r(s); \tag{7}$$

$$y(s) = \sum_{i=1}^{m} \langle r(s),\ \bar{v}^{(i)}(s) \rangle \, \bar{w}_i(s) \, \bar{z}^{(i)}(s), \tag{8}$$

Эти соотношения дают представление о внутренней структуре и поведении линейной МСАУ. На рис. 1 приведена структурная схема, иллюстрирующая в развернутой скалярной форме описание (8).

В качестве примера рассмотрим линейную МСАУ с МПФ:

$$W(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{s+1}{s(s+2)} & \dfrac{2}{s(s+2)} \\[2ex] \dfrac{1}{s(s+2)} & \dfrac{s}{s(s+2)} \end{bmatrix}. \tag{9}$$

В соответствии с (7) ее можно представить в виде:

$$W(s) = \begin{bmatrix} \sqrt{0{,}5} & -\sqrt{0{,}5} \\ \sqrt{0{,}5} & \sqrt{0{,}5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{1}{s} & 0 \\[2ex] 0 & \dfrac{1}{s+2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{0{,}5} & \sqrt{0{,}5} \\ -\sqrt{0{,}5} & \sqrt{0{,}5} \end{bmatrix}. \tag{10}$$

Соответствующая структурная схема МСАУ дана на рис. 2.

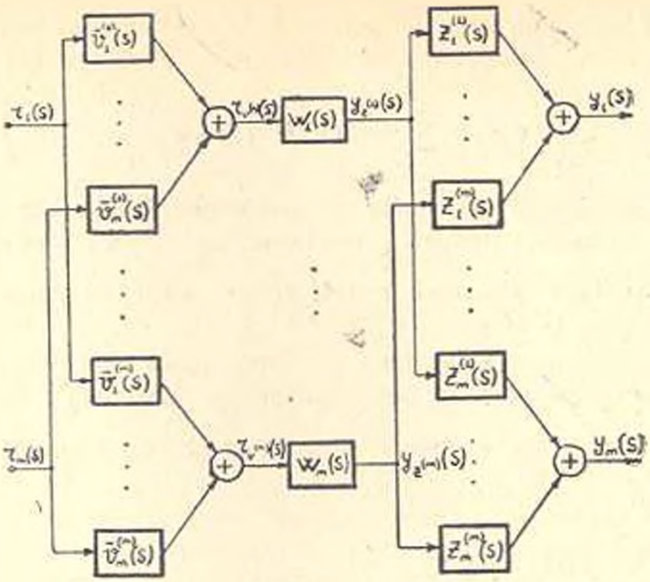

Рис. 1. Развернутая скалярная структурная схема линейной МСАУ.

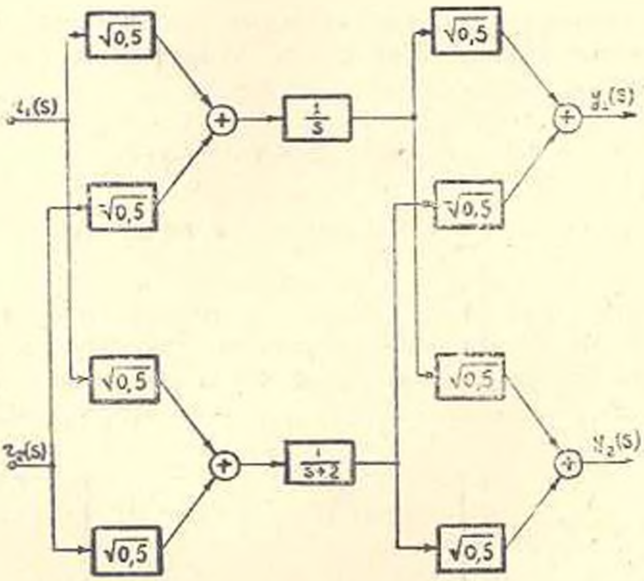

Рис. 2. Развернутая скалярная структурная схема линейной двумерной САУ.

Если на входы МСАУ подать гармонические воздействия с одинаковой частотой ω (все полюсы МПФ $W(s)$ лежат в левой полуплоскости), то в установившемся режиме выходы отдельных каналов будут гармоническими сигналами той же частоты. Соответствующие соотношения в этом случае могут быть получены заменой $s = j\omega$ в (1)—(8), причем, (6) будет определять уже частотную ГПФ, которую можно представить в виде:

$$\widehat{w}_i(j\omega) = A_i(\omega)\, e^{j\widehat{\varphi}_i(\omega)}; \tag{11}$$

$$A_i(\omega) = |\widehat{w}_i(j\omega)| = [\overline{\widehat{w}}_i(j\omega)\, \widehat{w}_i(j\omega)]^{\frac{1}{2}}, \tag{12}$$

$$\widehat{\varphi}_i(\omega) = \operatorname{arctg}\,[\operatorname{Im} \widehat{w}_i(j\omega) / \operatorname{Re} \widehat{w}_i(j\omega)] + k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \ldots, \tag{13}$$

где $A_i(\omega)$ — i-ая главная амплитудно-частотная функция, ее график — амплитудно-частотная характеристика (ГАЧХ), а аргумент $\varphi_i(\omega)$ — i-ая главная фазо-частотная функция, ее график — главная фазочастотная характеристика (ГАЧХ).

Введем понятие обобщенного усиления МПФ:

$$A_r(\omega) = \frac{\|y_i(j\omega)\|_E}{\|r_i(j\omega)\|_E} = \left[\frac{\langle y(j\omega),\, y(j\omega)\rangle}{\langle r(j\omega),\, r(j\omega)\rangle}\right]^{\frac{1}{2}}; \tag{14}$$

$$A_r(\omega) = \left[\frac{\sum_{i=1}^{m} A_i^2(\omega)\, r^2_{v(i)}(\omega)}{\sum_{i=1}^{m} r^2_{v(i)}(\omega)}\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{15}$$

Обобщенное усиление зависит от направления входного вектора $r(j\omega)$. В частности, когда $r(j\omega)$ направлен вдоль i-го главного входного направления, имеет место равенство

$$A_r(\omega) = A_i(\omega). \tag{16}$$

Введя обозначения

$$A_{\max}(\omega) = \max_i A_i(\omega), \qquad A_{\min}(\omega) = \min_i A_i(\omega), \tag{17}$$

можно записать, что

$$A_{\min}(\omega) \leqslant A_r(\omega) \leqslant A_{\max}(\omega). \tag{18}$$

Аппарат главных передаточных функций применяется для исследования устойчивости, чувствительности и ослабления возмущений линейных МСАУ при наличии ошибок и неопределенностей в исходной информации, что характерно для реальных технических систем. Так, например, в [4] показано, что $A_{\min}(\omega)$ матрицы возвратной разности линейной МСАУ являются надежной мерой ее грубости.

Для определения ГАЧХ $A_i(\omega)$ используются разработанные к настоящему времени надежные пакеты прикладных программ для вычисления сингулярных чисел комплексных матриц [5].

ЕрПИ им. К. Маркса 15. 1. 19[illegible]

ЛИТЕРАТУРА

1. *Воеводин В. В.* Линейная алгебра. — М.: Наука, 1974. — 336 с.
2. *Amir-Moez Ali R.* On Pseudo-poper values of a linear transformation. — Monatsh. Math., 1968, 72, №1 p. 6–8.
3. *Карслян Э. В.* Главные передаточные функции и главные направления линейных многомерных систем автоматического управления. — В сб.: Межвуз. тематич. сб. научн. тр. по автомат., вычисл. техн. и электронике. — Ереван: Изд-во ЕрПИ, 1984, с. 24—28.
4. *Солодовников В. В., Карслян Э. В.* О грубости линейных многомерных систем автоматического управления. — В кн.: Создание и внедрение автоматизированных и автоматических систем управления непрерывными и дискретно-непрерывными технологическими процессами. Тез. докл. X Всесоюз. научн. тех. совещ., Алма-Ата: 1983, с. 196—197.
5. *Dongarra J. J., Moler C. B., Bunch J. R., Stewart G. W.* LINPACK User's Guide. — Philadelphia: SIAM, 1979. — p. 368.