

ТЕХНИЧЕСКАЯ КИБЕРНЕТИКА

С. В. ПАМБУХЧЯН, Л. С. КОСТАВЯН, А. Л. БЕГЛЯРН

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТОВ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯ
 ПРИ ОПТИМАЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ НА ФАЗОВОМ
 ПРОСТРАНСТВЕ

Пусть объект управления автоматической системы (АС) имеет линейную математическую модель:

$$\dot{X} = AX + BY, \quad \dot{Y} = U. \quad (1)$$

Требуется перевести из данного начального многообразия (X_1^0) в состояние покоя (X_0^0), обеспечивая минимум функционала:

$$I = \lim_{T_1 \rightarrow \infty} \frac{1}{2T_1} \int_0^{T_1} (X^T \lambda_x X + Y^T \lambda_y Y + U^T \lambda_u U) dt \quad (2)$$

при условии

$$|Y| \leq U_{\text{доп}}, \quad |Y| \leq Y_{\text{доп}}, \quad (3)$$

где X, Y — векторы (матрицы столбцы) соответственно фазовых координат ($n \times 1$) и управляющих воздействий ($m \times 1$); A, B — матрицы коэффициентов объекта ($n \times n$) и управляющих воздействий ($n \times m$); $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_u$ — заданные диагональные матрицы весовых коэффициентов; T — знак транспонирования. При этом матрица закона управления переменной структуры U известна [1].

В настоящей работе определяются моменты переключения законов управления переменной структуры на фазовом пространстве. Ввиду того, что движение системы в n -мерном фазовом пространстве геометрически построить невозможно, обратимся к простейшим объектам второго и третьего порядка, анализ которых позволяет сделать обобщение о движении системы в n -мерном пространстве.

Сначала рассмотрим объект второго порядка, описывающийся следующей системой уравнений:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Известно [1, 2], что оптимальный закон управления при наличии условий (2) и (3):

$$u = \begin{cases} -x_1 - \sqrt{3} x_2 & \text{при } |x_2| < x_{2\text{дон}}; \\ 0 & \text{при } |x_2| \geq x_{2\text{дон}}. \end{cases} \quad (5)$$

Оптимальная траектория на фазовой плоскости для открытой области в дифференциальной форме описывается следующим уравнением:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{x_1}{x_2} - \sqrt{3}. \quad (6)$$

Интегрируя (6), можно убедиться в том, что траектория представляет собой семейство логарифмических спиралей (рис. 1). Уравнение изоклина, которое получается из условия $dx_2/dx_1 = 0$, будет $-x_1 - \sqrt{3}x_2 = 0$.

Учтем ограничения (3) поэтапно. а) $|x_2| = U_{\text{дон}} = 1$. При этом решая (6), получаем фазовую траекторию системы, описываемую уравнением параболы (рис. 1, участок МК):

$$x_1 - \frac{x_2^2}{2} = 0, \quad (7)$$

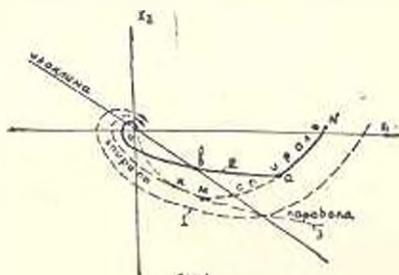


Рис. 1.

б) $|x_2| = x_{2\text{дон}} = \text{const}$. В этом интервале движения отключаются обратные связи системы [1]. При этом из (6) получаем с одной стороны $dx_2/dx_1 = 0$, т. к. $x_2 = \text{const}$,

а с другой $-\frac{x_1}{x_2} - \sqrt{3} = \frac{-x_1 - \sqrt{3}x_2}{x_2} \neq 0$, т. к. координата x_1 меняется непрерывно. Движение системы продолжается на границе области состояний (прямой ab). В момент (точка b на линии изоклина), когда $u = -x_1 - \sqrt{3}x_2 = 0$, снова окажется справедливым (6):

$$\frac{dx_2}{dx_1} = 0, \quad u = -\frac{x_1}{x_2} - \sqrt{3} = 0. \quad (8)$$

Если в этот момент произвести включение обратных связей, то система плавно выйдет на новую спиральную траекторию bo и движение продолжится по ней до состояния покоя ($x_1 = 0, x_2 = 0$).

в) $|x_2| = U_{\text{дон}} = 1$ и $|x_2| = x_{2\text{дон}} = \text{const}$. Движение AC начинается из некоторой начальной точки N по спирали. Если вблизи точки a успеет выполняться условие $|x_2| = 1$, то движение пройдет по параболе до точки a . Начиная с точки a , где $x_2 = x_{2\text{дон}}$, движение продолжается по прямой ab . С точки b снова выходит спираль и остается на ней, пока снова не выполнится условие $|x_2| = 1$, которому соот-

ответствует парабола. Дальнейшее движение системы, где $|x_2| < 1$, $|x_2| < x_{2\text{доп}}$, до точки покоя o происходит по спирали. Таким образом, траектория движения оптимальной АС второго порядка, в самом общем случае состоит из следующих участков: спираль — парабола — прямая — спираль — парабола — спираль. Отметим, что линия изоклины для объекта второго порядка является линией включения обратных связей.

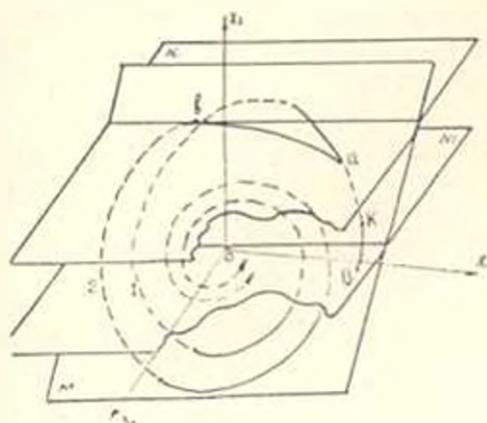


Рис. 2.

Теперь рассмотрим объект третьего порядка, система уравнений которого имеет вид:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (9)$$

Оптимальным законом управления при условии (2), (3) является

$$u = \begin{cases} -x_1 - 2,42x_2 - 2,42x_3 & \text{при } |x_2| < x_{2\text{доп}}; \\ 0 & \text{при } |x_2| > x_{2\text{доп}}. \end{cases} \quad (10)$$

Определяя значение фазовых координат x_1 , x_2 , x_3 из (9) с учетом (10), убедимся, что движение системы в открытой области происходит по пространственной спирали (кривая 1, рис. 2), экстремуму которого по x_2 соответствует уравнение плоскости M :

$$x_1 + 2,42x_2 + 2,42x_3 = 0. \quad (11)$$

При $|x_2| < x_{2\text{доп}}$ и $|x_2| = U_{\text{доп}} = 1$. Траектория движения o, a будет состоять из двух участков: а) o, k (пространственная спираль); б) ka , определяемый выражением:

$$x_1 = \frac{t^3}{6} + c_1 \frac{t^2}{2} + c_2, \quad x_2 = \frac{t^2}{2} + c_1 t + c_2, \quad x_3 = t + c_1. \quad (12)$$

которое получается решением (9). Здесь и в дальнейшем c_i — постоянные интегрирования.

Как только $x_2 = x_{2\text{доп}}$ (точка a), отключаются обратные связи, движение AC переходит на плоскость N_1 (или N_2) и описывается уравнением параболы

$$x_1 = \frac{x_2^2}{2c_4} + c_5. \quad (13)$$

Из частных дифференциальных уравнений, которые получаются делением третьего уравнения в системе (9) поочередно на первое и второе, и учитывая (10), получаем:

$$\frac{\partial x_2}{\partial x_1} = \frac{\partial x_2}{\partial x_2} = 0, \quad \text{но} \quad \frac{x_1 + 2,42x_2 + 2,42x_2}{x_2} \neq 0. \quad (14)$$

$$\frac{x_1 + 2,42x_2 + 2,42x_2}{x_2} \neq 0.$$

Неравенства в (14) обусловлены тем, что $x_1(0+) \neq x_1(0-)$ и $x_2(0+) \neq x_2(0-)$. В точке b , находящейся одновременно на плоскостях M и N , левая часть неравенства будет равна нулю, следовательно:

$$\frac{\partial x_2}{\partial x_1} = - \frac{x_2 + 2,42x_2 + 2,42x_2}{x_2}, \quad \frac{\partial x_2}{\partial x_2} = - \frac{x_1 + 2,42x_2 + 2,42x_2}{x_2}. \quad (15)$$

В точке b , где снова имеет место (15), должно произойти включение обратных связей. Дальнейшее движение происходит снова по пространственной спирали до состояния покоя (кривая 2), если при этом $|x_2| = u_{\text{доп}} = 1$, то движение в промежуточном интервале описывается выражением (12). Следовательно, плоскость M для объекта третьего порядка является плоскостью включения обратных связей.

Движение системы n -го порядка начинается внутри замкнутой области по сложной фазовой траектории. При выходе любого управляющего воздействия y_i из зону ограничения, движение системы происходит на границе заданной области. Причем, для каждого перехода y_i из зоны насыщения в зону линейности (или наоборот), вид траектории меняется. Движение будет продолжаться на границе области до тех пор, пока не выйдут все y_i из зоны насыщения. Для оптимального движения системы при каждом пересечении фазовой траектории с поверхностями переключения, которые определяются уравнениями $u_i = 0$ ($i = 1, \dots, m$), должно произойти включение обратных связей соответствующего канала управления.

Для нахождения коэффициентов в выражениях закона управления составлена программа решения системы уравнений, описывающих объект 6-го порядка с 2 каналами управления. По составленной программе найден закон управления переменной структуры объекта с математической моделью:

$$\begin{cases}
 x_1 = 0,5(x_2 - x_4) = 0,5x_0; \\
 x_2 = x_1; \\
 x_3 = 0,01x_2 - 0,1x_4 + 0,004x_5 + 0,058y_1 - 0,07y_2; \\
 x_4 = x_2 - 0,17x_1 + 0,01x_5 + 0,028y_1 - 0,18y_2; \\
 x_5 = x_4; \\
 x_6 = 0,11x_2 - 0,2x_4 - 3,12x_5 - 2,66x_6 + 0,5y_1 + 3,02y_2; \\
 y_1 = u_1; \\
 y_2 = r_2.
 \end{cases} \quad (15)$$

а) В открытой области:

$$\begin{cases}
 y_1 = 9,9x_1 - 13,1x_2 - 24,3x_3 + 9,1x_4 - 0,19x_5 - 0,18x_6 - \\
 \quad - 1,57y_1 - 0,248y_2; \\
 y_2 = -47,1x_1 - 24,8x_2 - 12,7x_3 + 20x_4 - 6,6x_5 - \\
 \quad - 0,71x_6 - 0,175y_1 - 3,14y_2;
 \end{cases}$$

б) при выходе y_2 на ограничение $|y_2| = Y_{2\text{ном}}$:

$$\begin{cases}
 y_1 = -56,6x_1 - 64,5x_2 - 54,5x_3 + 46,7x_4 - 3,51x_5 - 0,234x_6 - 2,02y_1; \\
 y_2 = 0;
 \end{cases}$$

в) при выходе y_1 на ограничение $|y_1| = Y_{1\text{ном}}$:

$$\begin{cases}
 y_2 = 48x_1 - 36,4x_2 - 38,3x_3 - 32,5x_4 - 6,9x_5 - 0,66x_6 - 3,22y_1; \\
 y_1 = 0.
 \end{cases}$$

Анализ полученных результатов показывает, что динамические свойства объекта (качество переходных процессов) при переменной структуре АС, когда переключения происходят по разработанной методике, лучше, чем системы постоянной структуры, где не учитываются ограничения управляющих воздействий. Результаты моделирования на вычислительной машине приведены в таблице.

Таблица

Вид структуры	Время переходного процесса			
	x_0	x_2	x_4	x_6
Постоянная структура	39	43,5	44	37
Переменная структура	19	21	26	25

Разработанная методика нахождения моментов переключения переменной структуры можно применять при синтезе АС многофазных

Ս. Վ. ՓԱՐԲԵՆԶՅԱՆ, Լ. Ս. ԿՈՍՏԱՆՅԱՆ, Ա. Լ. ԲԵՂԱԲՅԱՆ

**ՆԱԶԱՅԻՆ ՏԱՐԱՅՈՒԹՅՈՒՆՈՒՅՄ ՈՊՏԻՄԱԿ ՀԱՐԺՄԱՆ ԳԵՊՔՈՒՄ
ՓՈՒՆԱՆՋԱՏՄԱՆ ԿՈՄԵՆՏՆԵՐԻ ՈՐՈՇՈՒՄԸ**

Ա մ փ ո ֆ ո ռ մ

Ղեկավարող կորորդինատների վրա սահմանափակման պայմաններում, 2-րդ և 3-րդ կարգի օբյեկտների համար ֆազային տարածությունում որոշված ևն փոփոխական կառուցվածքի ղեկավարման օրենքի փոխանջատման մոմենտները: Ստացված արդյունքները ընդհանրացվում են Ո կապուղով ղեկավարվող Ո-րդ կարգի օբյեկտի համար: Ըստ կազմված ծրագրի, Երկու ղեկավարման կապուղով 6-րդ կարգի օբյեկտի համար որոշված է ղեկավարման օրենքը: Ստացված արդյունքները ցույց են տալիս փոփոխական կառուցվածքով համակարգի առավելությունը հաստատունի նկատմամբ:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Лукомский Ю. А., Памбучьян С. В. Анализ многоканальной автоматической системы при ограниченных управляющих воздействиях — Изв. вузов. Приборостроение, 1974, т. XVIII, № 1, с. 47—50.
2. Памбучьян С. В. Синтез многоканальной астатической АС при ограниченных управляющих воздействиях. — В кн.: Межвуз. сб. науч. тр. Автоматика и вычислительная техника, Ереван, 1977, вып. III, с. 166—169.