

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА

С. С. АГЯН, А. К. МАТЕВОСЯН, А. А. МУРАДЯН

ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ ЦИФРОВЫЕ ФИЛЬТРЫ
ПО СЕМЕЙСТВУ БАЗИСОВ ТИПА ХААРА

Классическая задача фильтрации заключается в восстановлении полезного сигнала $z(t)$ на фоне случайной помехи [1]. Последние годы в связи с достижениями в области цифровой техники большое внимание уделяется построению цифровых фильтров, что объясняется рядом их преимуществ по сравнению с аналоговыми [2]. При этом использовались различные ортогональные преобразования. Дискретные ортогональные преобразования делятся на два крупных класса, это ортогональные системы:

равномерно ограниченных функций (ВКФ) [3, 4];

неограниченных базисов, которые обладают быстрыми алгоритмами вычисления [5].

Для первого класса построены цифровые фильтры в различных упорядочениях: по Адамару, коду Грея и Пэли. Для второго класса вопрос построения цифрового фильтра остается открытым. Возникнет также задача построения так называемых «гибридных» фильтров, обладающих положительными свойствами обоих классов.

В настоящей работе системы Хаара [4, 5] порядка $N = m_1 m_2 \dots m_n$ упорядочиваются адекватно внутренней структуре определяемых систем, на основании которых построен и реализован на ЭВМ цифровой фильтр по алгоритму быстрого преобразования обобщенных систем [4, 5] в упорядочениях по Адамару [7] и Пэли [4], проведен анализ структуры систем посредством z -преобразования их передаточных функций, приведены амплитудно-частотные характеристики систем Фурье, Уолша, классического и обобщенного Хаара.

Пусть $\{\Psi_{j_k}(j)\}_{j=1}^N$:

$$\Psi_{j_k}(j) = \sqrt{N_{k-1}} \prod_{i=1}^{k-1} \chi_{d_i j_i} \Psi_{d_i j_i}^{(0)}, \quad (1)$$

где

$$\Psi_{j_k}^{(0)}(j) = 1; \quad k = 1, 2, \dots, m_{k-1}; \quad d_k = 1, 2, \dots, m_{k-1};$$

$$j_k = 0, 1, 2, \dots, m_{k-1}; \quad D = \sum_{i=1}^n d_i N_{i-1}; \quad j = \sum_{i=1}^n j_i N_{i-1}$$

полная система дискретных ортогональных функций.

Построенные системы (1) в частных случаях при $m_1 = m_2 = \dots = m_n$ и $\varphi_j^{(1)}(j_q) = \exp(i2\pi d_q j_q / m_2)$ совпадают с системами [4, 5], а по структуре являются поэтажно-кронекееронскими [6]. В работе [3] было предложено такое понятие частоты, которое определяется как полное число оборотов, совершаемых вектором, изображающим функцию на плоскости. Непосредственное использование такого определения частоты для систем [4, 5] приводит к упорядочению, не согласующемуся с интуитивными представлениями частоты. Частоту функций [4, 5] определим как число оборотов вектор-функции на плоскости, приходящееся на единицу отсчета функции. Упорядоченные таким образом системы [4, 5] назовем системами Хаара—Пэли. Для иллюстрации приводятся системы [4, 5] в обычном упорядочении, по [2] и упорядоченные по [3] с соответствующими графиками изменения фаз (рис. 1 и 2). Системы построены на основе функций:

$$\begin{aligned} \varphi_1^{(1)} &= [1 \ 1 \ 1]; & \varphi_2^{(1)} &= [1 \ -1 \ 1]; & \varphi_1^{(2)} &= [1 \ 1 \ 1 \ 1]; \\ \varphi_2^{(2)} &= [1 \ W \ W^2]; & \varphi_3^{(2)} &= [1 \ W^2 \ W^1]; & W &= \exp(-i2\pi/3); \end{aligned}$$

$$\Psi_{2,3} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & W & W^2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & W^2 & W^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & W & W^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & W^2 & W^1 \end{bmatrix}; \quad (2)$$

$$\bar{\Psi}_{2,3} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & W & W^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & W & W^2 \\ 1 & W^2 & W^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & W^2 & W^1 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

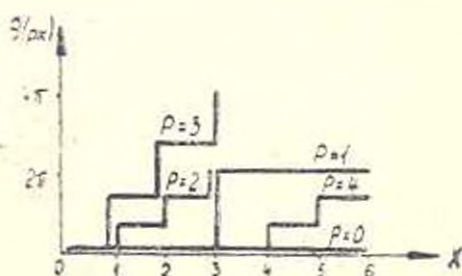


Рис. 1.

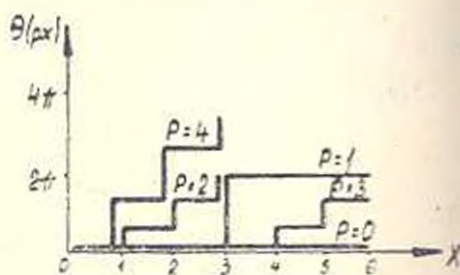


Рис. 2.

Отметим некоторые свойства построенной системы.

1. Система $\{\Psi_D(j)\}_{j=1}^N$ является ортогональной.
2. Система $\{\Psi_D(j)\}_{j=1}^N$ может быть упорядочена по [4], т. е. справедливо соотношение:

$$\Psi_{N_{k+1}} = \begin{bmatrix} \Psi_{N_k} \otimes e_{m_{k+1}} \\ \sqrt{N_k} I_{N_k} \otimes \varphi_2^{(k+1)} \\ \vdots \\ \sqrt{N_k} I_{N_k} \otimes \varphi_{m_{k+1}}^{(k+1)} \end{bmatrix}, \quad (4)$$

где $\varphi_i^{(k+1)}$, $i = 2, 3, \dots, m_{k+1}$ — функции исходной матрицы $\varphi^{(k+1)}$, упорядоченной по [4].

3. Предложенный метод построения систем функций (1) позволяет получить при различных исходных системах $\{\varphi^{(k)}\}$ гибридные ортогональные преобразования: Хаар—Уолш, Хаар—Фурье, Хаар—Фурье—Слент и т. д.

Необходимым этапом исследования систем преобразований является построение быстрых алгоритмов выполнения преобразований в различных упорядочениях. Ниже приводятся алгоритмы преобразования Хаара по системам (1) в упорядочениях по [7] и [4].

Утверждение 1. Система [4, 5] порядка $N = m_1 m_2 \dots m_k$ в упорядочениях по [7] и [4] допускает разложения:

$$\Psi_N = R_1 R_2 \dots R_k; \quad \bar{\Psi}_N = \bar{R}_1 \bar{R}_2 \dots \bar{R}_k, \quad (5)$$

где

$$R_k = \begin{bmatrix} I_{N_{k-1}} \otimes e_{m_k} \\ \sqrt{N_{k-1}} I_{N_{k-1}} \otimes \varphi_2^{(k)} \\ \vdots \\ \sqrt{N_{k-1}} I_{N_{k-1}} \otimes \varphi_{m_k}^{(k)} \end{bmatrix}; \quad \bar{R}_k = \begin{bmatrix} I_{N_{k-1}} \otimes e_{m_k} \\ \sqrt{N_{k-1}} I_{N_{k-1}} \otimes \varphi_2^{(k)} \\ \vdots \\ \sqrt{N_{k-1}} I_{N_{k-1}} \otimes \varphi_{m_k}^{(k)} \end{bmatrix};$$

$$R_i = \left[\begin{array}{c|c} I_{N_{i-1}} \otimes e_{m_i} & 0 \\ \hline \sqrt{N_{i-1}} I_{N_{i-1}} \otimes \varphi_2^{(i)} & 0 \\ \hline 0 & I_{N_k - N_i} \end{array} \right];$$

$$\bar{R}_l = \left\| \begin{array}{c|c} I_{N_{l-1}} \otimes e_{m_l} & \\ \hline \sqrt{N_{l-1}} I_{N_{l-1}} \otimes \varphi_2^{(l)} & 0 \\ \vdots & \\ \sqrt{N_{l-1}} I_{N_{l-1}} \otimes \varphi_{m_l}^{(l)} & \\ \hline 0 & I_{N_A - N_l} \end{array} \right\|;$$

$\varphi_2^{(1)}, \dots, \varphi_{m_A}^{(l)}$ — функция системы $\varphi^{(i)}$, $i = 1, 2, \dots, m$, упорядоченной по [4].

Доказательство проводится простым перемножением $R_1 \dots R_A$ с учетом того, что нижние части R_A и $\bar{R}_A$ представляют собой последние подматрицы матриц и упорядоченных по [7] и [4]. Умножив $R_{A-1}R_A$ и $\bar{R}_{A-1}\bar{R}_A$, получим:

$$R_{A-1}R_A = \left\| \begin{array}{c} I_{N_{A-2}} \otimes e_{m_A} \otimes e_{m_{A-1}} \\ \sqrt{N_{A-2}} I_{N_{A-2}} \otimes \varphi_2^{(A)} \otimes e_{m_{A-1}} \\ \vdots \\ \sqrt{N_{A-1}} I_{N_{A-1}} \otimes \varphi_2^{(A-1)} \end{array} \right\|;$$

$$\bar{R}_{A-1}\bar{R}_A = \left\| \begin{array}{c} I_{N_{A-2}} \otimes e_{m_A} \otimes e_{m_{A-1}} \\ \sqrt{N_{A-2}} I_{N_{A-2}} \otimes \varphi_2^{(A)} \otimes e_{m_{A-1}} \\ \vdots \\ \sqrt{N_{A-2}} I_{N_{A-2}} \otimes \varphi_{m_A}^{(A)} \otimes e_{m_{A-1}} \\ \sqrt{N_{A-1}} I_{N_{A-1}} \otimes \varphi_2^{(A-1)} \\ \vdots \\ \sqrt{N_{A-1}} I_{N_{A-1}} \otimes \varphi_{m_{A-1}}^{(A-1)} \end{array} \right\|.$$

т. е. предпоследние подматрицы восстановлены и т. д. Представление Ψ_N в произведение слабозаполненных матриц (5) задает быстрый алгоритм вычисления преобразования.

Утверждение 2. Для семейства ортогональных преобразований Хаара асимптотически быстрый алгоритм вычисления преобразования

$F = \Psi_N \cdot f$ формируется за $L = \sum_{k=1}^A m_{k+1} \dots N_{k+1-k}$ операций.

Перейдем к исследованию нерекурсивных цифровых фильтров, задаваемых строками матриц Хаара.

Определение 1. Нерекурсивные цифровые фильтры, определяемые по формуле

$$y_i(n) = \sum_{j=1}^N \psi_i(j) x(n-j), \quad (6)$$

где $\psi_i(j)$, $i = 0, 1, \dots, N-1$ — i -ая функция систем Хаара, называются цифровыми фильтрами Хаара.

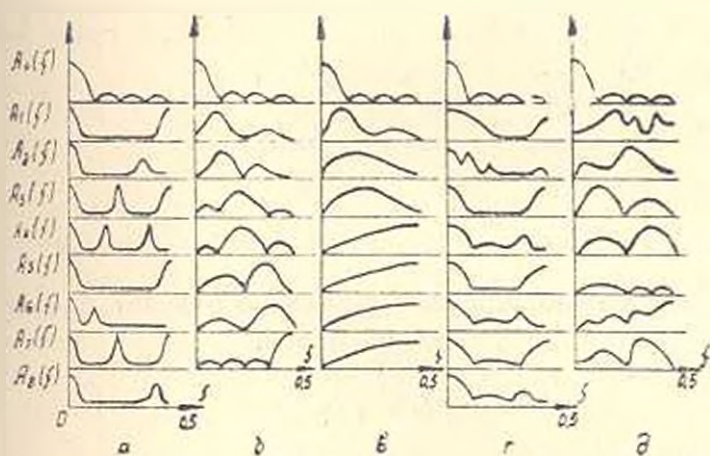


Рис. 3.

Передаточная характеристика такого фильтра:

$$H_m(z) = \sum_{k=0}^{N-1} \psi_m(k) z^{-k}.$$

Справедливо следующее:

а) если $A(z)$ есть z -преобразование дискретной функции $a(k, N)$ длины N , то z -преобразование функции $a(k, N) \otimes e_k = 0$ (i, N_m):

$$\frac{1-z^{-m}}{1-z} \sum_{i=0}^{N-1} a_i(z_m)^{-i} = (1-z)(1-z^{-m}) A(z^m);$$

б) если $A(z)$ есть z -преобразование функции $a(k, N)$, то z -преобразование функции $[0, \dots, 0, a(0, N), \dots, a(N-1, N)]$ есть $z^{-1} A(z)$.

Фильтры Хаара порядка $N = m_1 m_2 \dots m_n$ состоят из n групп, причем, каждая k -я группа ($k = 1, 2, \dots, n$) содержит $m_1 \dots m_{k-1} (m_k - 1) = N_k - N_{k-1}$ фильтров, укомплектованных в свою очередь в $(m_k - 1)$ подгруппы.

Утверждение 3. В j -ой подгруппе k -ой группы фильтры семейства Хаара имеют одинаковую амплитудную характеристику, равную

$$A_{N_m} = |\psi_j(k) (z^{N_{k-1}}; m_k)|.$$

и фазовые характеристики, равные

$$\varphi_{H_m} = |\varphi_f(k)(z^{N-1}, m, z^{-1}V^{-1}m_k)|.$$

В качестве примера на рис. 3 приведены амплитудные характеристики фильтров Фурье (а.— $N=9$), Уолша (б.— $N=8$) и три системы семейства Хаара: Хаар (в.— $N=8$), Хаар—Фурье (г.— $N=9$), Хаар—Слеит (д.— $N=8$). Все расчеты по определению амплитудных характеристик произведены по программам, написанным на языке ПЛ/1, реализованном на ЕС ЭВМ.

ВЦ АН АрмССР,
ЕрГУ

11 VII 1983

Ս. Ս. ԱՂԱՅԱՆ, Ա. Կ. ՄԱԹԵՎՈՍՅԱՆ, Ա. Ա. ՄԱՐԿԻՅԱՆ

ՀԱՅԱՐԻ ՏԻՊԻ ԲԱԶԻՍՆԵՐԻ ԸՆՏԱՆԻՔՈՎ ԴԵՏԵՐՄԻՆԱՅՎԱԾ ԽՂԱՅԻՆ ՖԻԼՏՐԵՐ

Ա մ փ ո փ ո ռ ը

Բերված է $N = m_1 - m_2 - \dots - m_n$ կարգի Հաարի համակարգի ընտանիքը, որի համար կառուցված է արագ ձևափոխման ալգորիթմը՝ համարակալված ըստ Հադամարի և Պլիլիի Հաարի ընտանիքի համակարգերի ձևափոխման հիման վրա կառուցված են նաև նոր թվային ֆիլտրեր, շ-ձևափոխման միջոցով կառուցված է համակարգի կառուցվածքի վերլուծությունը, բերված են Ֆուրյեի, Ուոլշի, Հաարի դասական և ընդհանրացված համակարգերի ամպլիտուդա-փա-ճախականային բնութագրերը:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Хеммингс Р. Цифровые фильтры.— М.: Сов. радио, 1980.— 221 с.
2. Хармут Х. Теория секвентного анализа.— М.: Мир, 1980.— 574 с.
3. Трахтман А. М., Трахтман В. А. Основные теории дискретных сигналов на конечных интервалах.— М.: Сов. радио, 1975.— 208 с.
4. Боломаков Н. А., Ракошиц В. С. Приложение ортогональных систем дискретных функций к микропроцессорной обработке сигналов.— Изв. АН СССР, Тех. кибернетика, 1977, № 5, с. 143—157.
5. Agaian S. S., Mutevosian A. K. Haar transforms and automatic quality test of printed circuit boards.— Acta Cybernetica, 1981, Szeged. Tom 5, fasc 3 p. 315—362.
6. Ярославский Л. П. Введение в цифровую обработку изображений.— М.: Сов. радио, 1979.— 312 с.
7. Агалян С. С., Матевосян А. К. Быстрое преобразование Адамара.— В сб.: Труды ВЦ АН АрмССР, 1982, т. XII, с. 73—90.