ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Տեխնիկական գիտութ. սերիա XXXVIII, № 5, 1985 Серия технических наук

ТЕХНИЧЕСКАЯ КИБЕРНЕТИКА

О. Н. ГАСПАРЯН

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ЧАСТОТНЫЕ ПОКАЗАТЕЛИ КАЧЕСТВА НЕЛИНЕЙНЫХ МНОГОСВЯЗНЫХ СИСТЕМ РЕГУЛИРОВАНИЯ

1. *Введение*. В [1] на базе метода характеристических передаточных функций (ХПФ) рассмотрена задача исследования автоколебаний в нелинейных многосвязных системах автоматического регулирования (МСАР). Настоящая статья посвящена дальнейшему развитию инженерной теории нелинейных МСАР. Основное внимание в ней уделено проблеме исследования вынужденных одночастотных колебаний при условии захватывания, а также вопросам оценки запасов устойчивости и качества колебательных переходных процессов.

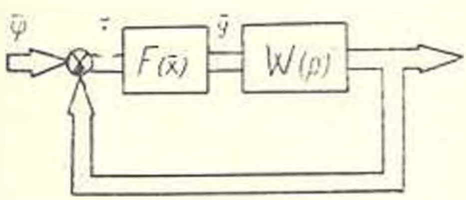

Рис. 1.

2. *Вынужденные одночастотные колебания в МСАР общего вида.* Пусть в нелинейной n-мерной МСАР общего вида (рис. 1) при подаче входных гармонических воздействий $\bar{\varphi}(t)$ с частотой $\Omega_в$ и компонентами $\varphi_i(t) = B_i \sin(\Omega_в t + \psi_i)$ устанавливается режим вынужденных колебаний той же частоты $\Omega_в$ и выполняется свойство фильтра линейной части [1]. Тогда, осуществляя гармоническую линеаризацию нелинейностей, получим следующее приближенное уравнение динамики МСАР:

$$x_0 = \Phi_0(j\Omega_в, \bar{A})\bar{\varphi}_0 = [I + W(j\Omega_в)G(\bar{A})]^{-1}\varphi_0, \tag{1}$$

где $G(\bar{A})$ — матрица коэффициентов гармонической линеаризации нелинейностей, а $\bar{\varphi}_0$ и $\bar{x}_0$ — векторы комплексных амплитуд входа и первых гармоник переменных x_i.

Неизвестными в задаче являются амплитуды A_i колебаний на входах нелинейностей, а частота $\Omega_в$ задается внешним воздействием $\bar{\varphi}(t)$.

Сдвиги по фазе колебаний переменных x_i однозначно определяются при найденных A_i, как аргументы компонент в правой части (1). Если воспользоваться диадным представлением передаточной матрицы $Q(j\Omega_n, \overline{A}) = W(j\Omega_n)G(\overline{A})$ разомкнутой гармонически линеаризованной МСАР [1], то выражение (1) можно переписать в эквивалентной форме

$$x_0 = \sum_{i=1}^{n} \overline{c}_i (j\Omega_n, \overline{A}) \langle \overline{c}_i^+ (j\Omega_n, \overline{A}), \overline{\varphi}_0 \rangle / [1 + q_i (j\Omega_n, \overline{A})], \qquad (2)$$

где $\overline{c}_i (j\Omega_n, \overline{A})$ и $\overline{c}_i^+ (j\Omega_n, \overline{A})$ — оси канонического и двойственного базисов; $q_i (j\Omega_n, \overline{A})$ — ХПФ разомкнутой МСАР [1].

Из (2) вытекает, что если в МСАР устанавливается режим вынужденных колебаний частоты Ω_n, то это обязательно сопровождается колебаниями на той же частоте во всех n одномерных характеристических системах. Далее, диадная форма записи (2) показывает, что вектор комплексных амплитуд $\overline{x}_0$ представляется в виде линейной комбинации «реакций» МСАР вдоль осей канонического базиса. Рассматривая последовательно скалярные произведения обеих частей в (2) с векторами $\overline{c}_i^+ (j\Omega_n, \overline{A})$ и учитывая свойства двойственного базиса, получаем следующую систему n нелинейных комплексных уравнений

$$\langle \overline{c}_i^+ (j\Omega_n, \overline{A}), \overline{x}_0 \rangle = \langle \overline{c}_i^+ (j\Omega_n, \overline{A}), \overline{\varphi}_0 \rangle / [1 + q_i (j\Omega_n, \overline{A})], \qquad (3)$$
$$i = 1, 2, \ldots, n.$$

Отсюда приходим к выводу, что проекция вектора $\overline{x}_0$ на i-ую ось канонического базиса равна соответствующей проекции входного вектора $\overline{\varphi}_0$, умноженной на комплексную передаточную функцию i-ой замкнутой характеристической системы. Отметим, что в силу нелинейных свойств МСАР как канонический базис, так и множество ХПФ зависят от неизвестного вектора амплитуд $\overline{A}$ или, в конечном счете, от вектора входа $\overline{\varphi}_0$. Переходя в (3) к модулям, приходим к требуемой системе n нелинейных алгебраических уравнений относительно вектора $\overline{A}$:

$$|1 + q_i (j\Omega_n, \overline{A})| = r_i (j\Omega_n, \overline{A});$$
$$r_i (j\Omega_n, \overline{A}) = \frac{|\langle \overline{c}_i^+ (j\Omega_n, \overline{A}), \overline{\varphi}_0 \rangle|}{|\langle \overline{c}_i^+ (j\Omega_n, \overline{A}), \overline{x}_0 \rangle|}, \qquad (4)$$
$$i = 1, 2, \ldots, n.$$

Система (4) может быть решена на ЦВМ обычными методами [2], причем решение задачи имеет простую и наглядную геометрическую интерпретацию. Допустим, вектор $\overline{A}_*$ удовлетворяет системе (4). Подставив его в передаточную матрицу разомкнутой МСАР $Q(j\Omega_n, \overline{A})$, построим на комплексной плоскости семейство n характеристических годографов $q_i(j\Omega, \overline{A}_*)$ при изменении частоты Ω. Отметив на каждом из них точку $\Omega = \Omega_в$, проведем из этих точек, как из центра, окружности радиусов $r_i(j\Omega, \bar{A})$ (4), равных для каждого i отношению модулей проекций векторов $\bar{\varphi}_0$ и $\bar{x}_0$ на i-ую ось канонического базиса. Тогда из (4) имеем, что все эти окружности должны проходить через точку $-1, j0$ (рис. 2). Если система (4) не имеет решения, то это означает, что при заданных внешних воздействиях захватывание не происходит и движение нелинейной МСАР носит более сложный характер. Обычно подобные случаи встречаются при исследовании автоколебательных МСАР.

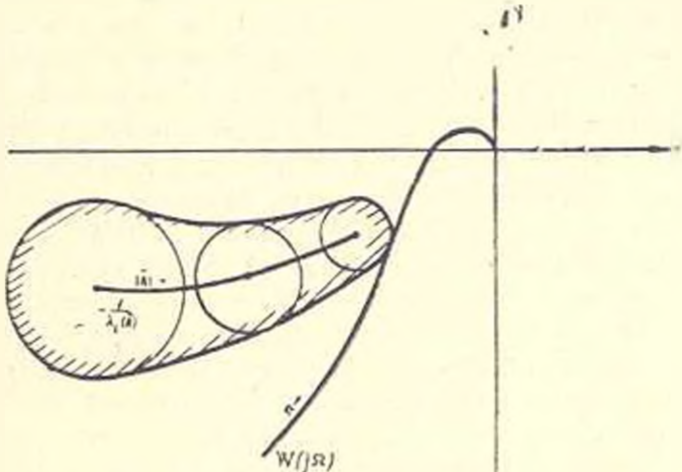

Рис. 2.

3. *Вынужденные колебания вдоль осей канонического базиса МСАР.* При произвольном направлении вектора $\bar{\varphi}_0$ в пространстве входных гармонических воздействий в реакции нелинейной МСАР могут участвовать, согласно (2), все n характеристических систем. В то же время, из (2) следует, что если $\bar{\varphi}_0$ направлен по какой-либо одной, например r-ой, оси канонического базиса:

$$\bar{\varphi}_0 = |\varphi_0| \bar{c}_r(j\Omega_в, \bar{A}), \tag{5}$$

то

$$\bar{x}_0 = |\bar{\varphi}_0| \bar{c}_r(j\Omega_в, \bar{A}) / [1 + q_r(j\Omega_в, \bar{A})], \tag{6}$$

т. е. в МСАР «возбуждается» только r-ая характеристическая система, вектор $\bar{x}_0$ направлен по той же оси $\bar{c}_r(j\Omega_в, \bar{A})$, а его модуль равен

$$|\bar{x}_0| = |\bar{A}| = |\bar{\varphi}_0| \setminus 1 + q_r(j\Omega_в, \bar{A})|. \tag{7}$$

Колебания каждой переменной x_i при этом сдвинуты по фазе относительно φ_i на одну и ту же величину

$$\Delta\varphi = \arg\{1/[1 + q_r(j\Omega_в, \bar{A})]\}. \tag{8}$$

Кроме того, из условия коллинеарности векторов $\overline{x}_0$ и $\overline{c}_r(j\Omega_n, \overline{A})$ вытекает уже известное по задаче исследования автоколебаний в МСАР условие коллинеарности вектора амплитуд $\overline{A}$ и действительного вектора $\overline{m}_r(\Omega_n, \overline{A})$, составленного из модулей компонент вектора $\overline{c}_r(j\Omega_n, \overline{A})$ [1], т. е.

$$\overline{A} = |\alpha| \, \overline{m}_r(\Omega_n, \overline{A}), \qquad |\alpha| = |\overline{A}|. \tag{9}$$

4. *Показатель колебательности устойчивых нелинейных МСАР.* В нелинейных МСАР, как и в системах с одним входом и выходом [3], за областью устойчивости положения равновесия в большинстве случаев лежит область автоколебаний, причем, в режиме установившихся автоколебаний в МСАР возбуждается только одна из характеристических систем, а вектор комплексных амплитуд $\overline{x}_0$ направлен по соответствующей оси канонического базиса [1]. Это означает, что нелинейная МСАР может перейти из области равновесно сходящихся процессов в область автоколебаний только вдоль одной из осей канонического базиса. Следовательно, чем дальше будут находиться от автоколебательной границы устойчивости одномерные характеристические системы, тем большими запасами устойчивости и лучшим качеством переходных процессов будет обладать нелинейная МСАР. Частотной оценкой запаса устойчивости характеристической системы может служить ее показатель колебательности M_i, определяемый как наибольшая относительная величина резонансного пика амплитудно-частотной характеристики в направлении i-ой оси канонического базиса. Математически это описывается следующим образом:

$$M_i = \sup_{\varphi} \frac{|\overline{x}_0|}{|\varphi_0|} = \sup_{\varphi} \frac{|\overline{A}|}{|\varphi_0|} = \frac{1}{|1 + q_i(j\Omega, \overline{A})|} \tag{10}$$

для всех $\overline{A}$, удовлетворяющих условию коллинеарности (9).

Для графического определения M_i отобразим уравнение (10) на комплексную плоскость семейства годографов $q_i(j\Omega, \overline{A})$, построенных при „коллинеарных" $\overline{A}$. Возводя левую и правую части в (10) в квадрат, после несложных преобразований получаем

$$[\mathrm{Re}\{q_i(j\Omega, \overline{A})\} + 1]^2 + [\mathrm{Im}\{q_i(j\Omega, \overline{A})\}]^2 = 1/M_i^2. \tag{11}$$

Геометрически это есть уравнение окружности с центром в точке $-1, j0$ и радиусом $r = 1/M_i$, т. е. постоянным значениям $M_i = \mathrm{const}$ соответствует на плоскости $q_i(j\Omega, \overline{A})\}$ семейство концентрических окружностей с центром в $-1, j0$. Отсюда приходим к выводу, что показатель колебательности M_i равен обратной величине радиуса той окружности, которая касается огибающей семейства годографов $q_i(j\Omega, \overline{A})$, используемым при исследовании автоколебаний [1] (рис. 3).

С приближением огибающей семейства $\{q_i(j\Omega, \bar{A})\}$ к точке $-1, j0$ радиус касательной окружности уменьшается, а величина M_i — увеличивается, стремясь в пределе к бесконечности. Максимальный из показателей M_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ является частотной мерой запаса устойчивости и, как следствие, показателем качества колебательных переходных процессов нелинейной МСАР.

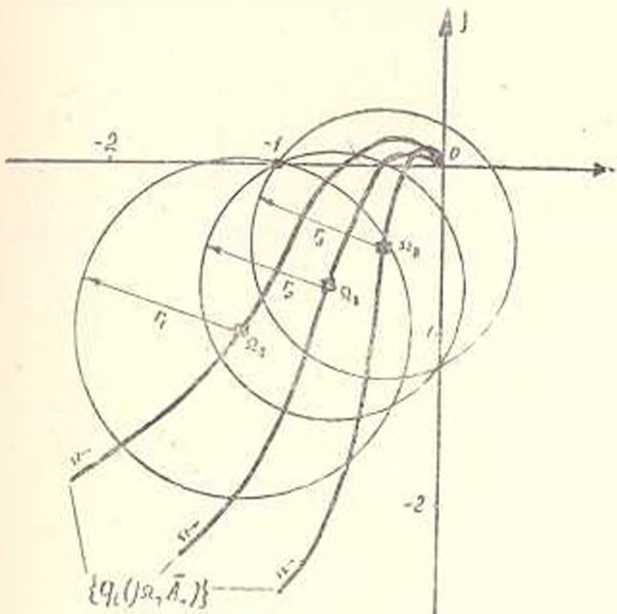

Рис. 3.

5. *Показатель колебательности однотипных, циркулянтных и антициркулянтных МСАР.* В однотипных МСАР (МОСАР) передаточные функции сепаратных каналов идентичны ($W_i(p) = W(p)$), а взаимные связи характеризуются некоторой числовой матрицей R. Как показано в [1], ХПФ гармонически линеаризованной МОСАР равны $q_i(j\Omega, \bar{A}) = \lambda_i(\bar{A})\, W(j\Omega)$, где $\lambda_i(\bar{A})$ — собственные значения матрицы $N(\bar{A}) = RG(\bar{A})$. Подставив выражение для ХПФ МОСАР в (10), после ряда преобразований получим следующее уравнение:

$$[\mathrm{Re}\{W(j\Omega)\} + \mathrm{Re}\{1/\lambda_i(\bar{A})\}]^2 + [\mathrm{Im}\{W(j\Omega)\} +$$

$$+ \mathrm{Im}\{1/\lambda_i(\bar{A})\}]^2 = |1/\lambda_i(\bar{A})\, M_i|^2.$$

На комплексной плоскости годографа $W(j\Omega)$ сепаратных каналов это есть уравнение окружности с центром в точке $-1/\lambda_i(\bar{A})$ и радиусом $r_i = |1/\lambda_i(\bar{A})\, M_i|$. Если построить окружности для всех „коллинеарных $\bar{A}$, то их огибающая образует запретную зону для $W(j\Omega)$. Ясно, что величина M_i равна параметру той запретной зоны, которая касается годографа $W(j\Omega)$, не пересекаясь с ним (рис. 4).

3—959

Отличительной чертой автоколебательных циркулянтных и антициркулянтных МСАР (ЦМСАР и АМСАР) является равенство амплитуд колебаний в отдельных каналах ($A_i = A$), при которых условие коллинеарности (9) выполняется заведомо [1]. Соответственно, выражение (10) при этом зависит от одной амплитуды A, что существенно упрощает расчеты. Графическая методика определения M_i в рассматриваемых

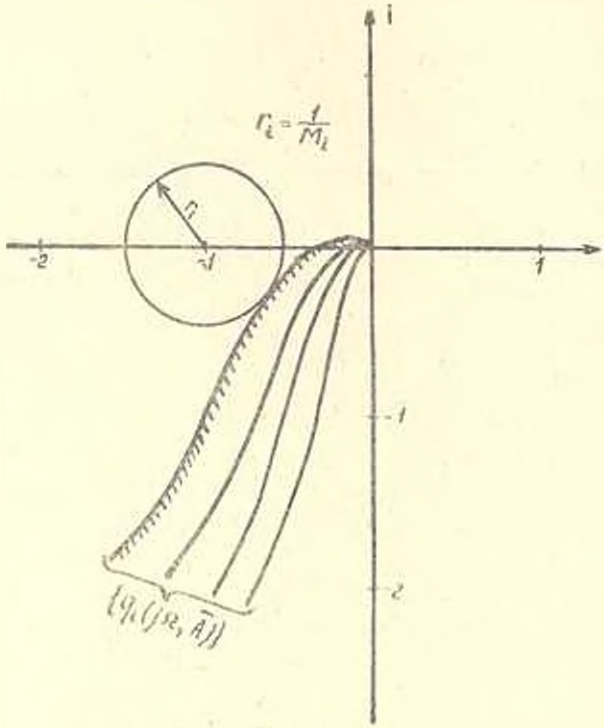

Рис. 4.

МСАР по существу иллюстрируется на рис. 3 и, при однотипных ЦМСАР и АМСАР — на рис. 4, где обозначение $\bar{A}$ следует заменить на A. В заключение отметим, что в случае ЦМСАР и АМСАР с диагональной матрицей нелинейностей, запретные зоны $M_i = \text{const}$ строятся на плоскости характеристических годографов линейной части $q_i(j\Omega)$ и совпадают с обычными запретными зонами, применяемыми при исследовании одномерных систем [3].

10. VI. 1983

Ռ. Ն. ԴԱՍՊԱՐՅԱՆ

ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ԲԱԶՄԱԿԱՊ ԿԱՐԳԱՎՈՐՄԱՆ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐԻ ՀԱՐԿԱԴՐԱԿԱՆ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԻ ԵՎ ՈՐԱԿԻ ՀԱՃԱԽԱԿԱՆԱՅԻՆ ՑՈՒՑԱՆԻՇՆԵՐԸ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Տրված է բնութագրող փոխանցման ֆունկցիաների մեթոդի տարածումը ոչ գծային բազմակապ ավտոմատ կարգավորման համակարգերում (ԲԱԿՀ)

համաժամացման պայմանի դեպքում միահաճախական հարկադրական տատանումների հետազոտման և տատանողական անցողիկ պրոցեսների որակի և կայունության պաշարների գնահատման խնդիրների վրա։ Տրված է ոչ գծային հարմոնիկ գծայնացված ԲԱՍՀ-ում համաժամացման երևույթի երկրաչափական մեկնաբանումը։ Մտցվում է միաչափ բնութագրող համակարգերի տատանողականության ցուցանիշի գաղափարը։ Նշված են ոչ գծային ԲԱԿՀ-ի հատուկ դասերի որակի վերլուծության առանձնահատկությունները։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гаспарян О. Н.* Исследование автоколебаний в нелинейных многосвязных системах регулирования методом характеристических передаточных функций.— Изв. АН АрмССР (сер. ТН), 1984, т. XXXVII, № 5, с. 34—39.
2. *Демидович Б. П., Марон И. А.* Основы вычислительной математики.— М., Наука, 1970.— 664 с.
3. *Попов Е. П.* Прикладная теория процессов управления в нелинейных системах.— М.: Наука, 1973.— 584 с.