ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Տեխնիկական գիտութ. սերիա XXXVIII, № 3, 1985 Серия технических наук

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА

М. К. БРУТЯН

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ АВТОМАТИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ ПРИ СТРУКТУРНЫХ ОГРАНИЧЕНИЯХ УПРАВЛЯЮЩИХ ПАРАМЕТРОВ

Введение. В настоящее время оптимальный закон управления (ОЗУ) сложной автоматической системой, как правило, содержит все переменные, определяющие состояние системы. Однако, практически все эти переменные не всегда доступны измерению. Более того, часто для достижения необходимого качества вовсе не требуется измерять все переменные состояния. В связи с этим в данной статье рассматриваются следующие два типа ограничений, накладываемых на структуру управляющих параметров сложной системы: а) ОЗУ формулируется как стационарная линейная комбинация одной и той же совокупности измеренных переменных состояния; б) ОЗУ представляет собой стационарную линейную комбинацию различных совокупностей измеренных переменных.

Постановка задачи. Рассматривается класс линейных стационарных автоматических систем, описываемых векторно-матричным уравнением

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Du(t), \qquad x(t_0) = x_0, \qquad t \in [t_0, T] \triangleq I_t, \tag{1}$$

где $x(t)$ — n-мерный вектор состояния; $u(t)$ — r-мерный вектор управления; A и D — матрицы соответствующих размеров.

Требуется выбрать закон управления в форме обратной связи $u(t) = u(x, t)$ так, чтобы минимизировался функционал качества

$$I = \frac{1}{2}\left\{x'_T \Gamma_T x_T + \int_{t_0}^{T} [x'(t) Bx(t) + u'(t) Eu(t)]\, dt\right\}. \tag{2}$$

Здесь E — $r \times r$-мерная положительно определенная симметрическая матрица, Γ_T и B — $n \times n$-мерные положительно полуопределенные симметрические матрицы, T — некоторый фиксированный момент времени.

Из работ [1—5] известно, что ОЗУ выражается следующим образом:

$$u^*(t) = -E^{-1} D\Gamma x(t) \triangleq C^* x(t), \tag{3}$$

причем, матрица Γ является симметричным и положительно определенным решением нелинейного дифференциального уравнения

$$-\dot{\Gamma} = A'\Gamma + \Gamma A - \Gamma D E^{-1} D'\Gamma + B, \qquad \Gamma(T) = \Gamma_T. \tag{4}$$

В ОЗУ (3) входят все переменные, определяющие состояние системы. Если измерены не все, а только некоторые переменные, то необходимо иметь дело со структурно ограниченным управляющим переменным. Целесообразно вводить определения рассматриваемых структурных ограничений.

Определение 1. Если компоненты вектора управления $u(t)$ являются стационарными линейными комбинациями одной совокупности измеряемых переменных состояния системы (1), то тогда удобно говорить, что ОЗУ имеет единое ограничение структуры.

Этот факт математически может быть описан следующим образом. Пусть

$$y(t) = Hx(t) \tag{5}$$

есть m-мерный $(m \leqslant n)$ вектор, где H — матрица размера $m \times n$, которую целесообразно называть матрицей измерения. Используя вектор (5), можно построить закон управления

$$u(t) = Qy(t), \tag{6}$$

где Q — $r \times m$ — мерная матрица, элементы которой являются расчетными параметрами закона управления. Объединяя (5), (6), можно получить:

$$u(t) = Cx(t), \tag{7}$$

где $C = QH$ — матрица усиления закона управления размера $r \times n$. Очевидно, что структурные ограничения ОЗУ отражаются в матрице C.

Определение 2. Если каждый компонент вектора $u(t)$ образуется как линейная комбинация различных совокупностей измеряемых переменных, то тогда нужно говорить, что ОЗУ имеет множественное ограничение структуры.

Этот факт может быть сформулирован следующим образом. Пусть вводятся m_i-мерные $(m_i \leqslant n,\ i = 1, \ldots, r)$ векторы y_i, каждый компонент которых представляет собой линейную комбинацию переменных состояния системы (1), т. е. $y_i(t) = H_i x(t)$, $i = 1, \ldots, r$, где H_i—$m_i \times n$-мерная матрица. Компоненты вектора управления по определению образуются следующим образом: $u_i(t) \triangleq q_i' y_i(t)$, где q_i — m_i-мерный вектор расчетных параметров закона управления. В этом случае закон управления выражается той же самой формулой (7), где строки матрицы C определяются соотношениями $C_i = q_i' H_i$. Если $u(t)$ имеет структуру (7), то функционал (2) принимает вид:

$$I = \frac{1}{2}\left\{x'_T \Gamma_T x_T + \int_{t_0}^{T} x'(t)\,[B + C'EC]\,x(t)\,dt\right\}. \tag{8}$$

Таким образом, задача сводится к обеспечению минимума функционала (8) при условии, что матрица усиления C принадлежит к некоторому множеству структурных ограничений G (при этом единое ограничение структуры будем обозначать как ω, а множественное — как Ω).

Решение. Известно, что для любой матрицы $C \in G$, когда собственные значения матрицы $A + DC$ имеют отрицательные действительные части, функционалы (8) определяются формулой [1—5]

$$I = \frac{1}{2}\, x'_0 \tilde{\Gamma}\, x_0. \tag{9}$$

Матрица $\tilde{\Gamma}$ размера $n \times n$ является симметричной положительно определенной и удовлетворяет уравнению

$$-\dot{\tilde{\Gamma}} = \tilde{\Gamma} A^0 + A^{0\prime}\tilde{\Gamma} + C'EC + B, \quad A^0 = A + DC, \quad \tilde{\Gamma}(T) = \Gamma_T. \tag{10}$$

Следует заметить, что $\operatorname{sp}\tilde{\Gamma} \geqslant \operatorname{sp}\Gamma$. Это очевидно из того, что матрица, равная разности $\tilde{\Gamma} - \Gamma$, является положительно полуопределенной. Следует также заметить, что выражение (9) показывает, что величина функционала зависит от начального состояния x_0. Это часто нежелательно, т. к. начальные условия практически не известны. Если считать, что x_0 есть случайный вектор, распределенный по поверхности гиперсферы, то величина $\operatorname{sp}\tilde{\Gamma}$, как показано в [1—3], пропорциональна математическому ожиданию функционала I. В результате задача выбора ОЗУ сводится к обеспечению $\min \operatorname{sp}\tilde{\Gamma}$ при $C \in G$, где матрица $\tilde{\Gamma}$ определяется уравнением (10).

Итак, при едином ограничении структуры закона управления необходимо обеспечить $\min \operatorname{sp}\tilde{\Gamma}$ при $C \in \omega$, а при множественном ограничении — $\min \operatorname{sp}\tilde{\Gamma}$ при $C \in \Omega$. В первом случае задача эквивалентна получению минимума $\operatorname{sp}\tilde{\Gamma}$ при выборе матрицы Q. Так как $C = QH$, то уравнение (10) можно кратко представить в виде $S(\tilde{\Gamma}, Q) = 0$. Ниже необходимые условия оптимальности управления получается из принципа максимума [1—3]. Гамильтониан для рассматриваемой задачи имеет вид:

$$\tilde{H} = \operatorname{sp}[\tilde{\Gamma} + L'S(\tilde{\Gamma}, Q)] = \operatorname{sp}\tilde{\Gamma} + \sum_{i=1}^{n} l_{ii}\, s_{ii}(\tilde{\Gamma}, Q). \tag{11}$$

Вычисляя $\dfrac{\partial\tilde{H}}{\partial Q} = \dfrac{\partial\tilde{H}}{\partial\tilde{\Gamma}} = \dfrac{\partial\tilde{H}}{\partial L}$, можно получить матрицу усиления ОЗУ:

$$C_1^* = -E^{-1} D' \tilde{\Gamma} LH' (HLH')^{-1} H, \qquad (12а)$$

где матрицы $\tilde{\Gamma}$ и L удовлетворяют уравнениям:

$$-\dot{\tilde{\Gamma}} = A^{0*'} \tilde{\Gamma} + \tilde{\Gamma} A^{0*} + C_1^{*'} E C_1^* + B, \quad \tilde{\Gamma}(T) = \Gamma_T, \qquad (12б)$$

$$\dot{L} = A^{0*} L + L A^{0*'} + I, \quad A^{0*} \triangleq A + DC_1^*, \quad L(T) = L_T. \qquad (12в)$$

Следует отметить, что уравнение (12 в) определяет условие устойчивости по Ляпунову для линейных стационарных систем [1, 2]. Это означает, что любая матрица C_1^*, которая удовлетворяет равенствам (12), может быть использована для ОЗУ только тогда, когда присоединенная матрица L является положительно определенной. В противном случае не является устойчивой, $\tilde{\Gamma}$ не ограничена и задача оптимизации не имеет решения. Такие же необходимые условия могут быть найдены для случая, когда матрица C имеет множественное структурное ограничение. В этом случае можно показать, что если E — диагональная матрица с элементами $e_1, \dots, e_r$, то тогда строка матрицы, определяющей ОЗУ, имеет вид:

$$C_{1i}^* = -e_i^{-1} d_i' \tilde{\Gamma} L H_i' (H_i L H_i')^{-1} H_i, \quad i = 1, \dots, r,$$

где d_i — i-ый столбец матрицы D, а матрицы $\tilde{\Gamma}$ и L удовлетворяют уравнениям (12б) и (12в).

Далее следует вводить некоторую матрицу C^*, не принадлежащую классу G и обеспечивающую минимум функционала (2). При ОЗУ решение $x^*(t)$ системы (1) не совпадает с решением $x(t)$, полученным при $C \in G$. Вектор ошибки, определяющей близость двух решений друг к другу, имеет вид:

$$\delta x(t) = x(t) - x^*(t), \qquad \delta x(t_0) = 0. \qquad (13)$$

Дифференцируя это выражение и учитывая уравнения (1), можно получить:

$$\delta \dot{x}(t) = A^0 \delta x(t) + D \delta C x^*(t), \qquad \delta C \triangleq C - C^*.$$

Пусть вектор $\delta u(t)$ определяется соотношением $\delta u(t) \triangleq \delta C x^*(t)$. Тогда можно записать: $\delta \dot{x}(t) = A^0 \delta x(t) + D \delta u(t)$. Разумеется, что если $\delta u(t) = 0$, то $\delta x(t) = 0$ для всех t, поскольку $\delta x(t_0) = 0$. Условие $\delta u(t) = 0$ выполняется при $C = C^*$. Этот случай по предположению исключается, и поэтому целесообразно минимизировать влияние возмущения $\delta u(t)$ на интервале I_t. Для этой задачи получается следующий функционал

$$I = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{T} \delta u'(t) E \delta u(t) dt, \qquad (14)$$

и следует искать $\min I$ при $C \in G$. По аналогии с предыдущим справедлива формула $I = \frac{1}{2} x_0' \tilde{\Gamma} x_0$, где матрица $\tilde{\Gamma}$ удовлетворяет уравнению

$$-\dot{\tilde{\Gamma}} = A^{0*'} \tilde{\Gamma} + \tilde{\Gamma} A^{0*} + \delta C' E \delta C, \qquad \tilde{\Gamma}(T) = \Gamma_T.$$

Помимо этого задача сводится к нахождению $\min \operatorname{sp} \tilde{\Gamma}$ при $C \in G$.

Для единого ограничения структуры закона управления ищется $\min \operatorname{sp} \tilde{\Gamma}$ при вариациях матрицы Q, причем матрица $\tilde{\Gamma}$ удовлетворяет уравнению

$$-\dot{\tilde{\Gamma}} = A^{0*'} \tilde{\Gamma} + \tilde{\Gamma} A^{0*} + (QH - C^*)' E (QH - C^*), \qquad \tilde{\Gamma}(T) = \Gamma_T.$$

Матрица C_1^*, определяемая (12а), может быть заменена выражением

$$C_1^* = C^* LH' (HLH')^{-1} H, \tag{15}$$

а при множественном ограничении структуры определяется формулой

$$C_{1i}^* = C_i^* LH_i' (H_i LH_i')^{-1} H_i .$$

Пример 1. Пусть система (1) имеет вид:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix},$$

а функционал (2) определяется выражением:

$$I = \frac{1}{2} \int_0^T \left\{ [x_1 \; x_2] \begin{bmatrix} 12 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + [u_1 \; u_2] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \right\} dt.$$

Используя выражение (3) и решая (4), получим:

$$C^* = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Найденный ОЗУ обеспечивает минимальное значение заданного функционала, равное 4.

Пусть в задаче, когда на закон управления накладывается единое ограничение, предполагается, что измеряется только переменная $x_1(t)$, т. е. $y(t) = x_1(t)$. Тогда $H = [1\ 0]$, а решение уравнения (12 в) в стационарном режиме дает:

$$L = \begin{bmatrix} 0{,}167 & -0{,}056 \\ -0{,}056 & 0{,}204 \end{bmatrix}; \qquad C_1^* = \begin{bmatrix} -2{,}66 & 0 \\ -0{,}66 & 0 \end{bmatrix}.$$

В результате функционал качества имеет величину 4,546.

В задаче, когда на закон управления накладывается множественное ограничение, предполагается, что два регулятора управляют независимо на основе своей собственной текущей информации о системе. Иными словами, предполагается, что управление $u_1(t)$ использует измерение координаты $x_1(t)$, а управление $u_2(t)$ — измерение координанаты $x_2(t)$. Таким образом,

$$y_1(t) = H_1 x(t) = x_1(t), \quad y_2(t) = H_2 x(t) = x_2(t),$$

т. е.

$$H_1 = [1 \quad 0], \quad H_2 = [0 \quad 1].$$

В соответствии с формулой (16) можно получить

$$C_1^* = \begin{bmatrix} -2{,}66 & 0 \\ 0 & -0{,}73 \end{bmatrix}. \tag{17}$$

Величина функционала качества в данном случае будет 4,34.

Рассматриваемый пример можно решить и другим подходом. Вместо обеспечения минимума функционала (14) можно минимизировать некоторую норму матрицы δC. Если норму определить как $\|\delta C\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n}\delta C_{ij}^2}$, то можно показать, что $\|\delta C\| = \sqrt{\operatorname{sp}[\delta C'\delta C]}$ и помимо этого, минимум нормы $\|\delta C\|$ при $C \in G$ равен $\min\limits_{C\in G}\sqrt{\operatorname{sp}[\delta C'\delta C]}$.

Структура ОЗУ при минимизации $\|\delta C\|$ определяется следующим образом: для единого ограничения структуры:

$$C_1^* = C^* H' (HH')^{-1} H, \tag{18}$$

а для множественного ограничения —

$$C_{1i}^* = C_i^* H_i' (H_i H_i')^{-1} H_i, \qquad i = 1, \ldots, r. \tag{19}$$

Пример 2. Рассматривается система, описываемая в примере 1. Здесь при едином ограничении структуры вместо матрицы C_1^*, определяемой выражением (15), можно получить по выражению (18) матрицу $C_1^* = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. При этом функционал качества имеет величину 4,526.

Для случая множественного ограничения вместо матрицы (17) по формуле (19) можно получить соответственно матрицу $C_1^* = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. ОЗУ при такой структуре обеспечивает величину функционала качества 4,41.

Сравнение результатов, полученных в примерах 1 и 2, показывает, что любой из двух рассмотренных методов может в принципе дать требуемый результат при определении ОЗУ. Нетрудно также проверить, что полученные ОЗУ в данной конкретной задаче обеспечивают устойчивость замкнутой автоматической системы.

Арм.НИИНТИ 25. XII. 1983

Մ. Կ. ԲՐՈՒՏՅԱՆ

ԱՎՏՈՄԱՏ ՀԱՄԱԿԱՐԳԻ ՕՊՏԻՄԱԼ ԿԱՌԱՎԱՐՈՒՄԸ ՂԵԿԱՎԱՐՈՂ ՊԱՐԱՄԵՏՐԵՐԻ ԿԱՌՈՒՑՎԱԾՔԱՅԻՆ ՍԱՀՄԱՆԱՓԱԿՈՒՄՆԵՐԻ ԱՌԿԱՅՈՒԹՅԱՄԲ

Ամփոփում

Գծային անփոփոխ բազմաչափ ավտոմատ համակարգերի կառավարման խնդիրը դիտարկվում է ղեկավարող պարամետրերի կառուցվածքային սահմանափակման առկայությամբ։ Քննարկվում է բարդ համակարգի կառավարման օրենքը, երբ ղեկավարող վեկտորի յուրաքանչյուր բաղադրիչ իրենից ներկայացնում է դրության փոփոխականի մեկ կամ տարբեր հավաքածոների գծային հաստատուն համակցություն։

Լուծման համար մշակված մեթոդը թույլ է տալիս իրականացնել բավական լայն դասի ավտոմատ համակարգերի օպտիմալ սինթեզ։ Օրինակների օգնությամբ ցուցադրվում է ստացված արդյունքների կիրառությունը։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ройтенберг Я. Н.* Автоматическое управление.— М.: Наука, 1978.— 551 с.
2. *Флеминг У., Ришел Р.* Оптимальное управление детерминированными и стохастическими системами.— М.: Мир, 1978.— 316 с.
3. *Зубов В. И.* Лекции по теории управления.— М.: Наука, 1975.— 495 с.
4. *Моисеев Н. Н.* Элементы теории оптимальных систем.— М.: Наука, 1975.— 526 с.
5. *Андреев Ю. Н.* Управление конечномерными линейными объектами.— М.: Наука, 1976.— 426 с.