

ЭЛЕКТРОТЕХНИКА

М. А. ҚАРАПЕТЯН, А. Г. ШАГЯН

К РАСЧЕТУ ПОТЕНЦИАЛА ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ШАРА
В ПОЛЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО КОНДЕНСАТОРА

В настоящее время имеются работы [1, 2], в которых решение задачи электростатики для проводящей сферы или незамкнутой сферической оболочки, расположенной в межэлектродном пространстве плоского конденсатора, приводится к решению интегрального уравнения [1] или к суммированию бесконечного ряда, когда один из электродов удален в бесконечность. На основе этих решений авторы [2] учитывают влияние приэлектродных явлений на частичный разряд в пространстве между заряженной сферой и заземленным электродом.

Однако на практике (при разделении или обогащении суспензий, в диэлектрических сепараторах, высоковольтных кабелях) часто используется коаксиальная система электродов, а инородное включение оказывается не проводящим, а диэлектрическим. Решение электростатической задачи в подобной системе является актуальным и может иметь практическое применение.

Пусть диэлектрическая сфера с радиусом a и абсолютной диэлектрической проницаемостью ϵ_1 расположена в электрическом поле бесконечно длинного цилиндрического конденсатора, заполненного диэлектриком с проницаемостью ϵ_2 . Под воздействием внешнего поля диэлектрическая сфера поляризуется и на ее поверхности появляются связанные электрические заряды, которые создают свое собственное поле. Электрическое поле в произвольной точке внутри конденсатора определяется как сумма внешнего и собственного полей сферы. Следовательно, если межэлектродное расстояние соизмеримо с размерами сферы или она расположена близко к одному из электродов, а другой удален в бесконечность, то поле, созданное поляризованной сферой, приведет к перераспределению свободных зарядов на электродах. Вследствие этого внешнее поле окажется отличным от радиального и в этом случае картина поля будет искажаться по сравнению со случаем, где приэлектродные явления не учитываются [3].

Для определения потенциала в произвольной точке $N(\rho, \theta, z)$ (рис.) необходимо решить уравнение Лапласа с учетом граничных условий на поверхности сферы

$$(U' = U'')_{\text{сф}}, \quad \left(\nu \frac{\partial U'}{\partial n} = \frac{\partial U''}{\partial n} \right)_{\text{сф}} \quad (1)$$

и на поверхности цилиндрических проводящих электродов

$$U''|_{S_1} = U_1^0, \quad U''|_{S_2} = U_2^0, \quad (2)$$

где U' и U'' — потенциалы внутри и вне сферы соответственно; \mathbf{n} — внешняя нормаль к поверхности сферы; U_1^0 и U_2^0 — потенциалы внутренней и внешней оболочки конденсаторов S_1 и S_2 (рис.); $\nu = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$.

Расположим начало сферической системы координат в центре сферы и запишем решение уравнения Лапласа в виде суммы бесконечного ряда сферических гармоник относительно выбранной координатной системы (рис.). Тогда, пользуясь условиями (1), для потенциалов внутри и вне сферы соответственно получаем [3]:

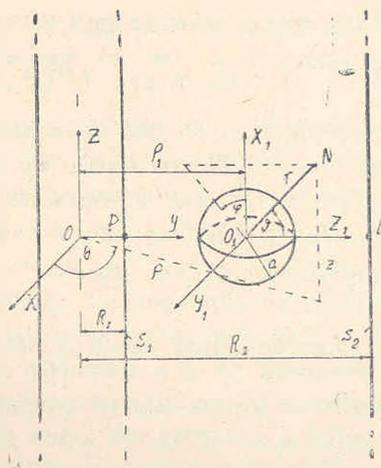


Рис.

$$U' = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2m+1}{\nu m + m + 1} B_m r^m S_m;$$

$$U'' = \sum_{m=0}^{\infty} \left[1 + \frac{m(1-\nu)}{\nu m + m + 1} \left(\frac{a}{r} \right)^{2m+1} \right] B_m r^m S_m, \quad (3)$$

где B_m — неизвестные потенциалы; S_m — сферическая гармоника m -го порядка.

Аналогичным образом можно разложить в ряд сферических гармоник функцию потенциала U^0 внешнего неискаженного радиального поля [3]

$$U^0 = \sum_{m=0}^{\infty} D_m r^m S_m, \quad (4)$$

где D_m — известные постоянные; Y_m — сферическая гармоника m -го порядка ($Y_m \neq S_m$).

Для применения граничных условий (2) и определения неизвестных постоянных выражений (3) необходимо записать U'' через цилиндрические функции. Однако в настоящее время не представляется возможным записать в общем виде основное решение (3) уравнения Лапласа в сферических координатах через цилиндрические функции, при расположении этих координатных систем согласно рис. [4, 5]. Поэтому для решения электростатической задачи в цилиндрических координатах в данном случае предлагается следующая методика.

Пользуясь соотношениями между координатами сферической и цилиндрической систем (рис.) [6], выразим функции потенциалов U'' и U^0 в цилиндрических координатах ρ , θ , z . Далее, разлагая $U''(\rho, \theta, z)$ и $U^0(\rho, \theta, z)$ в ряд Тейлора по θ и z в области точек $K\left(R_1, \frac{\pi}{2}, 0\right)$, $L\left(R_2, \frac{\pi}{2}, 0\right)$ (рис.) и применяя граничные условия (2) в области этих точек в виде равенства нулю потенциала поля искажения [7],

$$U''(R_1, \theta, z) = U^0(R_1, \theta, z), \quad U''(R_2, \theta, z) = U^0(R_2, \theta, z) \quad (5)$$

для определения бесконечного числа неизвестных постоянных, получаем систему с бесконечным числом алгебраических уравнений (т. к. ряды (3) и (4) являются бесконечными). Однако, ограничиваясь в (3) и (4) рассмотрением случая $m = p$ (p — любое целое положительное число), для определения неизвестных постоянных можно получить конечное число алгебраических уравнений и задачу решить приближенно.

Для практических целей представляет интерес определение напряженности поля у полюсов сферы — как внутри, так и в окружающей среде, а также диэлектрофоретической силы, действующей на нее. Поэтому в качестве критерия оценки точности проведенных расчетов можно выбрать относительное изменение напряженности поля у полюсов сферы или диэлектрофоретической силы, действующей на нее при $m = p$ и $m = p + 1$ приближениях. Такая оценка точности позволяет учитывать и погрешность, связанную с применением граничного условия (2) в виде (5).

В частности, в (4) и (5), ограничиваясь рассмотрением случая $m = 4$ и учитывая симметрию результирующего поля относительно плоскостей Y, O, Z_1 , X, O, Z_1 (рис.), для функции потенциалов U'' и U^0 соответственно получаются:

$$\begin{aligned} U'' = & U_0 + B_1 \rho_1 \left[1 + \frac{(1-\nu)h^3}{\nu+2} \right] (\gamma \sin \theta - 1) + \frac{B_2 b_1^2}{3} \times \\ & \times \left[1 + \frac{2(1-\nu)h^5}{2\nu+3} \right] (4\gamma^2 \sin^2 \theta - 4\gamma \sin \theta - 2\gamma^2 + 2) + \\ & + 0,2B_3 \rho_1^3 \left[1 + \frac{3(1-\nu)h^7}{3\nu+4} \right] \left\{ 5(M_1+1)\gamma^3 \sin^3 \theta - (5M_1+9)\gamma^2 \sin \theta + \right. \\ & \left. + [(5M_1-1)t^2 - (5M_1+3)\gamma^2 + 6]\gamma \sin \theta - (5M_1-3)t^2 + \right. \\ & \left. + (5M_2+3)\gamma^2 + 2 \right\} + \frac{1}{35} B_4 \rho_1^4 \left[1 + \frac{4(1-\nu)h^9}{4\nu+5} \right] \times \quad (6) \\ & \times \{ (280M_2+32)\gamma^4 \sin^4 \theta - (420M_2+80)\gamma^3 \sin^3 \theta - [(420M_2-48)t^2 + \\ & + 210M_2 - 350M_2\gamma^2 - 24\gamma^2 + 72]\gamma^2 \sin^2 \theta + [(48-420M_2)t^2 + \\ & + 420M_2\gamma^2 + 48\gamma^2 - 32]\gamma \sin \theta + (24\gamma^2 - 24 + 210M_2 - 210M_2\gamma^2) + \\ & + 8 - 24\gamma^2 - 210M_2\gamma^2 + 70M_2\gamma^4 \}; \end{aligned}$$

$$U^0 = U_0 - E_0 \rho_1 \left[24\gamma^4 \sin^4 \theta - \frac{16}{3} \gamma^3 \sin^3 \theta + (6\gamma^2 - 2\gamma^4) \sin^2 \theta + (4\gamma^3 - 4\gamma) \sin \theta + 0,25\gamma^4 - 3\gamma^2 + \frac{25}{12} \right], \quad (7)$$

где

$$\gamma = \frac{\rho}{\rho_1}; \quad t = \frac{z}{\rho_1}; \quad h = \frac{\xi}{(\gamma^2 - 2\gamma \sin \theta + t^2 + 1)^{1/2}}; \quad \xi = \frac{a}{\rho_1};$$

U_0 и E_0 — потенциал и напряженность внешнего неискаженного осесимметричного радиального поля в центре сферы; ρ_1 — расстояние сферы от оси конденсатора.

Поверхности цилиндрических проводящих электродов являются эквипотенциальными. Расчеты показывают, что если потенциалы электродов определить по выражениям U'' , где не учитываются приэлектродные эффекты, то наибольшее отклонение поля на поверхностях S_1

и S_2 от действительности получается в точках $K \left(R_1, \frac{\pi}{2}, 0 \right)$ и

$L \left(R_2, \frac{\pi}{2}, 0 \right)$ (рис.). Поэтому при приближенном решении задачи

во избежание больших погрешностей следует применить граничные условия (2) именно в областях этих точек.

Разлагая функции потенциалов U''' и U^0 в ряде Тейлора в области точек K и L по переменным θ , t и применяя граничные условия (5), для определения шести неизвестных постоянных ($B_1, B_2, B_3, B_4, M_1, M_2$) в (6) получаем систему из шести алгебраических уравнений, которая легко решается численным методом Гаусса.

Численный анализ показывает, что по мере увеличения степени m ($m = 2, 3, 4$) рядов (3) и (4) относительные изменения величин напряженности поля у полюсов сферы и диэлектрофоретической силы, действующей на нее, резко уменьшаются. Это свидетельствует о быстрой сходимости рядов (3). Обнаружено также, что учет приэлектродных явлений приводит к значительному отклонению напряженности поля и диэлектрофоретической силы от результатов аналогичных расчетов [3] без учета этих явлений.

В качестве заключения отметим, что предложенный метод позволяет решить рассматриваемую электростатическую задачу с любой точностью.

ЕрПИ им. К. Маркса

9. VI. 1984

Մ. Ա. ԿԱՐԱՊԵՏՅԱՆ, Ա. Գ. ՇԱՀՅԱՆ

ԴԱՆԱԿԱՆ ԿՈՆԴԵՆՍԱՏՈՐԻ ԴԱՇՏՈՒՄ ԳՏԵՎՈՂ ԴԻԷԼԵԿՏՐԻԿԱԿԱՆ
ԳՆԴԻ ՊՈՏԵՆՑԻԱԼԻ ՀԱՇՎԱՐԿԻ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

Ա Վ Փ Ա Փ Ո Ւ Մ

Քննարկվում է գլանական կոնդենստորի դաշտի աղավաղումը միալինակ դնդալին դիէլեկտրիկական մասնիկի առկայության հետեանքով: Դաշտի հաշ-

գլխին իրականացվել է կապլասի հավասարման լուծման եղանակով, մինչև շարժող կարգի գնդային հարմոնիկների հաշվառման պայմաններում: Պաշար սահմանափակված է գլանական էլեկտրոդների համապատենցիալ մակերևույթներով:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Проценко В. С., Николаев А. Г. Электрическое поле незамкнутой сферической обложки, расположенной между двумя параллельными проводящими плоскостями.— ЖТФ, 1983, т. 53, № 3, с. 423—427.
2. Naga M., Akazaki M. A method for prediction of gaseous discharge threshold voltage in the presence of a conducting particle.— J. Electrostat., 1976/1977, № 2, p. 223—239.
3. Карапетян М. А., Шагян А. Г. Диэлектрическая сфера во внешнем неоднородном электрическом поле.— Изв. АН АрмССР (сер. ТН), 1984, т. XXXVII, № 2, с. 14—19.
4. Ерофеев В. Г. Связь между основными решениями в цилиндрических и сферических координатах уравнений Гельмгольца и Лапласа.— АН БССР (сер. ФМН), 1972, т. 42, № 4, с. 42—46.
5. Уфлянд Я. С. Метод парных уравнений в задачах математической физики.— Л.: Наука, 1977.— 220 с.
6. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике.— М.: Наука, 1977.— 831 с.
7. Иоссель Ю. Я. Расчет потенциальных полей в энергетике.— Л.: Энергия, 1978.— 350 с.