

DOI: 10.54503/0571-7132-2022.65.1-107

КОМПТОНОВСКОЕ РАССЕЯНИЕ В ПЛОСКИХ СРЕДАХ: ПОЛЯРИЗАЦИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ И НЕЗАВИСИМОСТЬ ОТ АЗИМУТА. I. ТЕОРИЯ

Д.И.НАГИРНЕР, С.И.ГРАЧЕВ

Поступила 29 октября 2021

Принята к печати 16 февраля 2022

Рассматривается комптоновское рассеяние поляризованного излучения невырожденным и неполяризованным электронным газом. Для импульсов фотонов вводятся два поляризационных базиса: внешний, связанный с геометрией среды, и внутренний, связанный с актом рассеяния. Исходя из общего релятивистского кинетического уравнения, описывающего многократное действие механизма с учетом вынужденных процессов, показано, что для описания стационарного, не зависящего от азимута, поля излучения в плоском слое достаточно двух параметров Стокса линейной поляризации. Выявлены особенности функций перераспределения (ФП) по частоте и направлению, а также углов поворота от внутреннего базиса к внешнему и обратно, возникающие при рассеянии вперед и назад. Предложен алгоритм устранения особенностей при усреднении по азимуту. Средние по азимуту от наиболее сингулярного слагаемого ФП выражены через эллиптические интегралы первого рода.

Ключевые слова: перенос излучения; параметры Стокса; комптоновское рассеяние; функции перераспределения по частоте

1. Введение. Во многих астрофизических объектах важную роль в формировании спектра и поляризации излучения играет комптоновское рассеяние (см., например, [1]). Изучению этого вида рассеяния посвящено огромное число работ (см. обзор [2]).

В работе [3] было получено весьма общее релятивистское кинетическое уравнение (РКУ), описывающее комптоновское рассеяние поляризованного излучения с учетом так называемых обменных эффектов, т.е. вынужденного рассеяния для фотонов и принципа запрета для электронов.

В настоящей статье вначале в общем виде приводится РКУ для комптоновского рассеяния, которое конкретизируется для случая изотропного электронного газа. Затем рассматривается рассеяние в плоском слое с азимутальной симметрией поля излучения и показано, что вместо четырех параметров Стокса достаточно находить два параметра линейной поляризации.

Точная матрица рассеяния поляризованного излучения изотропным электронным газом была выведена в работе [4]. В обзоре [2] приведены много-

численные приближенные и асимптотические формулы, описывающие рассеяние в различных частных и предельных случаях. Там же выведена усредненная по направлениям функция перераспределения (ФП) интенсивности. При рассмотрении рассеяния в плоских средах часто оказывается, что источники не зависят от азимута и возникает необходимость усреднения по азимуту и ФП. Удобных формул для такого усреднения нет. Здесь дается алгоритм усреднения ФП по азимуту, причем показано, как можно устранить особенности при вычислении интегралов.

2. Кинетические уравнения комптоновского рассеяния.

2.1. *Основные определения.* Многократное комптоновское рассеяние поляризованного излучения описывается релятивистским кинетическим уравнением, для формулировки которого необходимо ввести ряд обозначений.

Излучение характеризуется вектором-столбцом параметров Стокса в средних числах заполнения фотонных состояний $\mathbf{n} = (n_I, n_Q, n_U, n_V)^T$, причем обычная интенсивность I связана с n_I соотношением $I = (2\hbar v^3/c^2)n_I$, где v - частота, и так же связаны другие элементы вектора с соответствующими параметрами Стокса.

Примем релятивистскую квантовую систему единиц, считая, что $c = \hbar = m = 1$.

Элементы вектора зависят от точки в пространстве Минковского $\underline{r} = \{t, \vec{r}\}$ и от импульса фотона $\vec{x} = x\vec{\omega}$, $|\vec{\omega}| = 1$. Используется также четырехмерный импульс $\underline{x} = \{x, \vec{x}\}$.

Электронный газ, с которым взаимодействует излучение, здесь считается невырожденным и неполяризованным, т.е. характеризуется функцией распределения (ФР) $f_e(\underline{r}, \vec{z})$, где $\vec{z} = z\vec{\Omega}$ - импульс электрона ($|\vec{\Omega}| = 1$), четырехмерный вектор импульса электрона $\underline{z} = \{\gamma, \vec{z}\}$, $\gamma = \sqrt{1+z^2}$.

2.2. *Поляризационные базисы.* Векторы Стокса соотносятся с определенными ортами поляризационного базиса, перпендикулярными импульсу фотона (направлению распространения излучения). Требуется введение двух типов базисов, а именно, внешнего и внутреннего. Внешний базис связан с геометрией области, в которой происходит рассеяние. Обычно в области имеется выделенное направление, характеризующее ортом $\vec{l}$. Тогда орты внешнего базиса можно определить так:

$$\vec{e}_1(\vec{\omega}, \vec{l}) = \frac{\vec{l} - \eta \vec{\omega}}{\sqrt{1 - \eta^2}}, \quad \vec{e}_2(\vec{\omega}, \vec{l}) = \frac{\vec{\omega} \times \vec{l}}{\sqrt{1 - \eta^2}}, \quad \eta = \vec{l} \cdot \vec{\omega}. \quad (1)$$

Внутренний базис опирается на орты направлений фотонов до и после рассеяния $\vec{\omega} \leftrightarrow \vec{\omega}_1$. Для фотона с направлением $\vec{\omega}$ это

$$\vec{e}_1(\vec{\omega}, \vec{\omega}_1) = \frac{\vec{\omega}_1 - \mu \vec{\omega}}{\sqrt{1 - \mu^2}}, \quad \vec{e}_2(\vec{\omega}, \vec{\omega}_1) = \frac{\vec{\omega} \times \vec{\omega}_1}{\sqrt{1 - \mu^2}}, \quad \mu = \vec{\omega} \vec{\omega}_1. \quad (2)$$

Угол поворота χ ортов внешнего базиса к ортам внутреннего определяется своими функциями

$$\cos \chi = \vec{e}_1(\vec{\omega}, \vec{l}) \vec{e}_1(\vec{\omega}, \vec{\omega}_1) = \vec{e}_2(\vec{\omega}, \vec{l}) \vec{e}_2(\vec{\omega}, \vec{\omega}_1) = \frac{\eta_1 - \eta \mu}{\sqrt{1 - \eta^2} \sqrt{1 - \mu^2}}, \quad (3)$$

$$\sin \chi = \vec{e}_1(\vec{\omega}, \vec{l}) \vec{e}_2(\vec{\omega}, \vec{\omega}_1) = -\vec{e}_2(\vec{\omega}, \vec{l}) \vec{e}_1(\vec{\omega}, \vec{\omega}_1) = \frac{\vec{l} \vec{\omega} \vec{\omega}_1}{\sqrt{1 - \eta^2} \sqrt{1 - \mu^2}}. \quad (4)$$

Аналогичными формулами определяются орты и функции, связанные с фотоном с импульсом $\vec{x}_1 = x_1 \vec{\omega}_1$.

Определим координаты введенных векторов. Пусть два орта $\vec{l}_1$ и $\vec{l}_2$ вместе с ортом $\vec{l}$ составляют правую тройку. Разложим по этому базису определенные выше векторы:

$$\vec{\omega} = \sqrt{1 - \eta^2} [\cos \varphi \vec{l}_1 + \sin \varphi \vec{l}_2] + \eta \vec{l}, \quad \vec{\omega}_1 = \sqrt{1 - \eta_1^2} [\cos \varphi \vec{l}_1 + \sin \varphi \vec{l}_2] + \eta_1 \vec{l}. \quad (5)$$

По внутреннему базису фотона $\vec{x}$ разложим векторы направления импульса фотона $\vec{x}_1$ и импульса электрона:

$$\vec{\omega}_1 = \sqrt{1 - \mu^2} \vec{e}_1(\vec{\omega}, \vec{\omega}_1) + \mu \vec{\omega}, \quad \vec{\Omega} = \sqrt{1 - \zeta^2} [\cos \Phi \vec{e}_1(\vec{\omega}, \vec{\omega}_1) + \sin \Phi \vec{e}_2(\vec{\omega}, \vec{\omega}_1)] + \zeta \vec{\omega}. \quad (6)$$

Косинусы углов между импульсами трех частиц выражаются через введенные координаты:

$$\begin{aligned} \zeta &= \vec{\omega} \vec{\Omega}, \quad \zeta_1 = \vec{\omega}_1 \vec{\Omega} = \zeta \mu + \sqrt{1 - \zeta^2} \sqrt{1 - \mu^2} \cos \Phi, \\ \mu &= \eta \eta_1 + \sqrt{1 - \eta^2} \sqrt{1 - \eta_1^2} \cos(\varphi_1 - \varphi). \end{aligned} \quad (7)$$

Через них выражается и смешанное произведение трех векторов:

$$\vec{l} \vec{\omega} \vec{\omega}_1 = \sqrt{1 - \eta^2} \sqrt{1 - \eta_1^2} \sin(\varphi_1 - \varphi). \quad (8)$$

2.3. Релятивистское кинетическое уравнение. Самое общее уравнение, описывающее комптоновское рассеяние в указанной ситуации, имеет вид (в правой части среди аргументов не указываются время и координаты точки взаимодействия, одинаковые для всех функций)

$$\begin{aligned} x \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{\omega} \vec{\nabla} \right) \mathbf{n}(\underline{r}, \vec{x}) &= \frac{r_e^2}{2} \int \frac{d^3 z}{\gamma} \frac{d^3 z_1}{\gamma_1} \frac{d^3 x_1}{x_1} \delta(\underline{z} + \underline{x} - \underline{z}_1 - \underline{x}_1) \times \\ &\times \{ f_e(\vec{z}_1) \hat{L}(-\chi - \Psi) \hat{F} \hat{L}(\chi_1 - \Psi) \mathbf{n}(\vec{x}_1) + [f_e(\vec{z}_1) - f_e(\vec{z})] \hat{N}(\vec{x}) \hat{L}(-\chi - \Psi) \times \\ &\times \hat{F} \hat{L}(\chi_1 - \Psi) \mathbf{n}(\vec{x}_1) - f_e(\vec{z}) [F + \hat{L}(-\chi - \Psi) \hat{A} \hat{L}(\chi - \Psi) \mathbf{n}(\vec{x})] \}. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь r_e - классический радиус электрона. В уравнение входят матрицы: матрицы преобразования параметров поляризации при повороте поляризационного базиса $\hat{L}$ (матрицы Чандрасекара), матрица рассеяния $\hat{F}$, матрица учета вынужденного рассеяния $\hat{N}$ и матрица учета анизотропии ФР электронов $\hat{A}$:

$$\hat{L}(\chi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(2\chi) & \sin(2\chi) & 0 \\ 0 & -\sin(2\chi) & \cos(2\chi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{F} = \begin{pmatrix} F & \mu_0^2 - 1 & 0 & 0 \\ \mu_0^2 - 1 & \mu_0^2 + 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B\mu_0 \end{pmatrix}, \quad (10)$$

$$\hat{N}(\chi) = \begin{pmatrix} n_I & n_Q & n_U & n_V \\ n_Q & n_I & 0 & 0 \\ n_U & 0 & n_I & 0 \\ n_V & 0 & 0 & n_I \end{pmatrix}, \quad \hat{A}(\mu_0) = \begin{pmatrix} 0 & \mu_0^2 - 1 & 0 & 0 \\ \mu_0^2 - 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Заметим, что матрицы Чандрасекара имеют свойства $\hat{L}(\chi_1 + \chi_2) = \hat{L}(\chi_1)\hat{L}(\chi_2) = \hat{L}(\chi_2)\hat{L}(\chi_1)$, т.е. они мультипликативны по аргументу и коммутативны, так как повороты ортов базиса происходят в одной плоскости.

Далее, в матрицу рассеяния входят величины

$$F = \mu_0^2 - 1 + B, \quad \mu_0 = 1 + \frac{1}{\xi} - \frac{1}{\xi_1}, \quad B = \frac{\xi}{\xi_1} + \frac{\xi_1}{\xi}, \quad \xi = x(\gamma - z\zeta), \quad \xi_1 = x_1(\gamma - z\zeta_1). \quad (12)$$

Наконец, косинус и синус угла Ψ

$$\cos\Psi = \frac{(\gamma - z\zeta)\sqrt{r - z\sqrt{1 - \zeta^2}\cos\Phi}}{r_0}, \quad \sin\Psi = \frac{z\sqrt{1 - \zeta^2}\sin\Phi}{r_0}, \quad r = \frac{1 + \mu}{1 - \mu}, \quad r_0 = \frac{1 + \mu_0}{1 - \mu_0}. \quad (13)$$

Функция распределения электронов является релятивистским инвариантом и нормирована в системе отсчета, сопутствующей электронному газу, в которой средний импульс электронов равен нулю,

$$\int d^3z f_e(\vec{z}) = n_e, \quad (14)$$

где n_e - концентрация электронов в указанной системе. Концентрация, как и сама ФР, вообще говоря, могут зависеть от координат и времени.

Дельта-функция отражает законы сохранения при рассеянии. Закон сохранения импульса позволяет вычислить интеграл по импульсу электрона $\vec{z}_1$, а с помощью закона сохранения энергии можно найти частоту фотона после рассеяния

$$x_1 = x \frac{\gamma - z\zeta}{\gamma - z\zeta_1 + x(1 - \mu)}. \quad (15)$$

Множитель, стоящий при $\mathbf{n}(\vec{x})$ и содержащий ФП интенсивности F , является коэффициентом ослабления вследствие рассеяния

$$n_e \sigma_T \bar{s}(\vec{x}) = \frac{1}{x} r_e^2 \int \frac{d^3 z}{\gamma} f_e(\vec{z}) \xi s(\xi), \quad \sigma_T = \frac{8\pi}{3} r_e^2, \quad (16)$$

где σ_T - томсоновское сечение, а инвариантный профиль

$$s(\xi) = \frac{3}{16\pi\xi^2} \int x_1^2 d^2\omega_1 F = \frac{3}{8\xi^2} \left[4 + \left(\xi - 2 - \frac{2}{\xi} \right) \ln(1 + 2\xi) + 2 \frac{\xi^2(1 + \xi)}{(1 + 2\xi)^2} \right]. \quad (17)$$

Элементы матрицы рассеяния являются релятивистскими скалярами, как и углы поворота базисов, однако последние записаны в фиксированной системе отсчета, а именно, в системе, сопутствующей электронному газу.

2.4. Изотропный электронный газ. В большинстве случаев приложений теории комптоновского рассеяния к изучению астрофизических объектов мало что известно о распределении электронов, поэтому обычно предполагается, что их распределение в сопутствующей системе отсчета изотропно:

$$f_e(\vec{z}) = n_e f_e(\gamma), \quad 4\pi \int_1^\infty f_e(\gamma) z \gamma d\gamma = 1. \quad (18)$$

Для этой системы интегралы по направлениям электронов, т.е. по $\vec{\Omega}$ (или по ζ и Φ), в уравнении (9) вычисляются, а слагаемое с матрицей $\hat{A}$ аннулируется. В результате уравнение принимает вид [2]

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{\omega} \vec{\nabla} \right) \mathbf{n}(x, \vec{x}) = n_e \frac{\sigma_T}{x} \int x_1 dx_1 d^2\omega_1 \left\{ \hat{L}(-\chi) \hat{R}(x_1, x, \mu) \hat{L}(\chi_1) \mathbf{n}(x_1) + \right. \\ \left. + \hat{N}(\vec{x}) \hat{L}(-\chi) [\hat{R}(x_1, x, \mu) - \hat{R}(x, x_1, \mu)] \hat{L}(\chi_1) \mathbf{n}(\vec{x}_1) - \hat{R}(x, x_1, \mu) \mathbf{n}(\vec{x}) \right\}. \quad (19)$$

Здесь матрица функций перераспределения (ФП) при рассеянии, которая получается при усреднении по распределению электронов по энергии матрицы, элементы которой зависят от их энергии:

$$\hat{R}(x, x_1, \mu) = \begin{pmatrix} R(x, x_1, \mu) & R_I(x, x_1, \mu) & 0 & 0 \\ R_I(x, x_1, \mu) & R_Q(x, x_1, \mu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_U(x, x_1, \mu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_V(x, x_1, \mu) \end{pmatrix} = \\ = \frac{3}{8} \int_{\gamma_*(x, x_1, \mu)}^\infty f_e(\gamma) \hat{R}(x, x_1, \mu, \gamma) d\gamma. \quad (20)$$

Нижний предел в интеграле по энергии

$$\gamma_*(x, x_1, \mu) = \frac{1}{2} \left[x - x_1 + Q \sqrt{1 + \frac{2}{q}} \right], \quad (21)$$

где обозначено

$$q = xx_1(1 - \mu) = \xi\xi_1(1 - \mu_0), \quad Q = \sqrt{x^2 + x_1^2 - 2xx_1\mu} = \sqrt{(x - x_1)^2 + 2q}. \quad (22)$$

Таким образом, в уравнение (19) входят пять ФП. Все они зависят от одних и тех же аргументов, а именно, от частот фотонов до и после рассеяния x и x_1 , а также от косинуса угла между их импульсами. Эти ФП, согласно (20), представляются интегралами по распределению электронов по энергиям от ФП, зависящих также от энергии электронов. Матрица ФП, зависящих от энергии электронов, выражается через матрицы $\hat{F}$ и $\hat{L}$, определенные в (10):

$$\begin{aligned} \hat{R}(x, x_1, \mu, \gamma) &= \frac{z}{2\pi} \int d^2 \Omega \frac{d^3 z_1}{\gamma_1} \delta(\underline{z} + \underline{x} - \underline{z}_1 - \underline{x}_1) \hat{L}(-\Psi) \hat{F} \hat{L}(-\Psi) = \\ &= \begin{pmatrix} R & R_I & 0 & 0 \\ R_I & R_Q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_U & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_V \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (23)$$

Приведем выражения для функций, аргументы которых x , x_1 , μ и γ в (23) и ниже для краткости опущены.

ФП с фиксированной энергией электронов имеют общие части. Пять функций выражаются через четыре функции:

$$R = R_a + R_b, \quad R_I = R_a + R_c, \quad R_Q = R_U + R_a, \quad R_V = R_b - qR_a. \quad (24)$$

Формула для одной из них - самая длинная:

$$\begin{aligned} R_U &= \frac{2}{Q} + \frac{4}{q^2 r^2} \left[(x + x_1)^2 Q + 2(a_+^3 - a_-^3) - 3(x + x_1)(\gamma_+ a_+ + \gamma_- a_-) \right] + \\ &+ 2R_c + 4 \frac{a_+ - a_-}{qr} + \frac{2}{q} \left(\frac{1}{a_-} - \frac{1}{a_+} \right). \end{aligned} \quad (25)$$

Остальные три функции представляются более короткими формулами:

$$R_a = \frac{x + x_1}{q^2} \left(\frac{\gamma_+}{a_+^3} + \frac{\gamma_-}{a_-^3} \right) + \frac{r}{q} \left(\frac{1}{a_-^3} - \frac{1}{a_+^3} \right) - \frac{2}{q^2} \left(\frac{1}{a_-} - \frac{1}{a_+} \right), \quad (26)$$

$$R_b = \frac{2}{Q} + \frac{q - 2}{q} \left(\frac{1}{a_-} - \frac{1}{a_+} \right), \quad R_c = 2 \frac{x + x_1}{q^2 r} \left(\frac{\gamma_+}{a_+} + \frac{\gamma_-}{a_-} \right) - 4 \frac{a_+ - a_-}{q^2 r}. \quad (27)$$

В этих формулах обозначено

$$a_{\pm}^2 = \gamma_{\pm}^2 + r, \quad \gamma_+ = \gamma + x_1, \quad \gamma_- = \gamma - x. \quad (28)$$

Приведем сводную формулу для ФП интенсивности:

$$R(x, x_1, \mu, \gamma) = \frac{2}{Q} + \frac{q^2 - 2q - 2}{q^2} \left(\frac{1}{a_-} - \frac{1}{a_+} \right) + \frac{1}{q^2} \left(\frac{(x + x_1)\gamma_- + rq}{a_-^3} + \frac{(x + x_1)\gamma_+ - rq}{a_+^3} \right). \quad (29)$$

Коэффициент ослабления при изотропных электронах зависит только от частоты x .

3. *Стационарное, не зависящее от азимута, поле излучения в плоском слое.*

3.1. *Модель плоского слоя.* Очень часто различные объекты, в которых происходит рассеяние излучения, моделируются плоским слоем, в котором все величины зависят не от трех, а только от одной пространственной координаты - глубины. Выделенным направлением в слое является направление роста глубин, так что в качестве орта $\vec{l}$ следует взять нормаль к границам. Примем, что этот орт направлен в сторону возрастания глубины. Вместо геометрической глубины z (это обозначение используется только здесь) можно ввести безразмерную оптическую, для комптоновского рассеяния ее определяют через томсоновское сечение:

$$\tau = \sigma_T \int_0^z n_e(z) dz. \quad (30)$$

В дальнейшем в качестве аргумента функций, зависящих от глубины в слое, будем применять именно τ .

Пусть источники излучения не зависят от времени, тогда и поле излучения будет стационарным. Уравнение (19) для стационарного поля излучения в плоском слое примет вид

$$\eta \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{n}(\tau, \vec{x}) = \frac{1}{x} \int x_1 dx_1 d^2 \omega_1 \left\{ \hat{L}(-\chi) \hat{R}(x_1, x, \mu) \hat{L}(\chi_1) \mathbf{n}(\tau, \vec{x}) + \right. \\ \left. + \hat{N}(\tau, \vec{x}) \hat{L}(-\chi) [\hat{R}(x_1, x, \mu) - \hat{R}(x, x_1, \mu)] \hat{L}(\chi_1) \mathbf{n}(\vec{x}_1) - \hat{R}(x, x_1, \mu) \mathbf{n}(\tau, \vec{x}) \right\}. \quad (31)$$

Здесь также в правой части уравнения не указана возможная зависимость элементов матриц от τ .

3.2. *Усреднение по азимуту.* Как правило, источники излучения можно считать не зависящими от азимута. Тогда и поле излучения обладает азимутальной симметрией. Поэтому при его расчете можно использовать ФП, усредненные по азимуту.

Известно, что при томсоновском и молекулярном рассеянии в плоском слое для описания поляризованного излучения, не зависящего от азимута, достаточно двух параметров Стокса. Покажем, что этим свойством обладает и комптоновское рассеяние.

Строение так называемой фазовой матрицы (здесь опущенные аргументы функций те же, что и у матрицы)

$$\hat{L}(-\chi)\hat{R}(x_1, x, \mu)\hat{L}(\chi_1) =$$

$$= \begin{pmatrix} R & R_I \cos(2\chi) & R_I \sin(2\chi) & 0 \\ R_I \cos(2\chi_1) & R_Q \cos(2\chi)\cos(2\chi_1) + R_U \sin(2\chi)\sin(2\chi_1) & R_Q \sin(2\chi)\cos(2\chi_1) - R_U \cos(2\chi)\sin(2\chi_1) & 0 \\ R_I \sin(2\chi) & R_Q \cos(2\chi)\sin(2\chi_1) - R_U \sin(2\chi)\cos(2\chi_1) & R_Q \sin(2\chi)\sin(2\chi_1) + R_U \cos(2\chi)\cos(2\chi_1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_V \end{pmatrix} \quad (32)$$

показывает, что в самом общем случае параметр круговой поляризации преобразуется независимо от других параметров, так что, если нет источников круговой поляризации, то она и не появится.

Из формул, определяющих ФП и матрицы Чандрасекара, следует, что азимуты входят в них либо через косинус угла рассеяния μ , либо через функции двойных углов поворота ортов поляризационных базисов χ и χ_1 , причем всегда в виде разности $\varphi_1 - \varphi$. Косинусы указанных углов содержат только зависимость от этой разности через μ , а синусы - пропорциональны $\sin(\varphi_1 - \varphi)$. Поэтому косинусы двойных углов содержат квадраты $\sin(\varphi_1 - \varphi)$, а синусы - их первые степени. При усреднении по азимуту все интегралы, содержащие первые степени, обращаются в нуль. В результате оказывается, что и параметр U , определяющий поляризацию под углом $\pi/4$ к выбранным ортам, отделяется от других параметров и, если он не порождается источниками, то остается равным нулю. Оставшиеся функции содержат только косинусы и квадраты синусов, поэтому интегралы от них по азимуту можно вычислять по промежутку $[0, \pi]$.

3.3. Переход к линейной поляризации. Таким образом, при выбранных поляризационных ортах, достаточно находить только два параметра линейной поляризации n_I и n_Q . В связи с этим введем двумерный вектор линейной поляризации и двумерную матрицу рассеяния:

$$\tilde{n} = \begin{pmatrix} n_I \\ n_Q \end{pmatrix}, \quad \tilde{\tilde{R}}(x, x_1, \eta, \eta_1) = \begin{pmatrix} \bar{R} & \bar{R}_{IQ} \\ \bar{R}_{QI} & \bar{R}_{QQ} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\varphi \int_{\gamma_+(x, x_1, \mu)}^\infty f_e(\gamma) d\gamma \tilde{R}(x, x_1, \eta, \eta_1, \varphi_1 - \varphi, \gamma). \quad (33)$$

Эта матрица - усредненная по распределению электронов матрица из элементов, зависящих от энергии γ , которая определяется равенством

$$\tilde{R}(x, x_1, \eta, \eta_1, \varphi_1 - \varphi, \gamma) = \begin{pmatrix} R(x, x_1, \mu, \gamma) & R_I \cos(2\chi) \\ R_I \cos(2\chi_1) & R_Q \cos(2\chi)\cos(2\chi_1) + R_U \sin(2\chi)\sin(2\chi_1) \end{pmatrix}. \quad (34)$$

При взятии интеграла по φ разность $\varphi_1 - \varphi$ можно заменить на φ .

Матрица $\hat{N}$ сводится к своему верхнему левому минору второго порядка $\tilde{N}$, так что уравнение (31) принимает форму

$$\eta \frac{\partial}{\partial \tau} \tilde{n}(\tau, \eta, x) = \frac{3}{16\pi x} \int x_1 dx_1 d\eta_1 \left\{ \bar{\bar{R}}(x_1, x, \eta_1, \eta) \tilde{n}(\tau, \eta_1, x_1) + \right. \\ \left. + \tilde{N}(\tau, \eta, x) [\bar{\bar{R}}(x_1, x, \eta_1, \eta) - \bar{\bar{R}}(x, x_1, \eta, \eta_1)] \tilde{n}(\tau, \eta_1, x_1) - \bar{R}(x, x_1, \eta, \eta_1) \tilde{n}(\tau, \eta, x) \right\}. \quad (35)$$

4. Усреднение по азимуту.

4.1. *Поведение функции γ_* .* Чтобы усреднение элементов матрицы по распределению электронов можно было бы производить при произвольной заданной функции $f_e(\gamma)$, желательно в интеграле (33) поменять порядок интегрирования. Для определения пределов интегралов после перемены порядка интегрирования сначала требуется изучить зависимость предела интегралов по энергии электронов (21) от косинуса μ , а через него от азимута при различных частотах x, x_1 и косинусах η, η_1 .

Заметим, что предел γ_* , представленный как функция трех аргументов, имеющих прямой смысл: две частоты x и x_1 и косинус угла рассеяния μ , фактически зависит от двух их комбинаций $x_* = x - x_1$ и $q = xx_1(1 - \mu)$. Внесем этот факт в обозначение:

$$\gamma_*(x, x_1, \mu) = \gamma_*(x_*, q) = \frac{1}{2} \left(x_* + \sqrt{4 + x_*^2 + 2q + 2\frac{x_*^2}{q}} \right). \quad (36)$$

Из такого представления функции очевидно, что

$$\gamma_*(x_*, q) \sim \begin{cases} \frac{|x_*|}{\sqrt{2q}} \rightarrow \infty & \text{при } x_* \neq 0 \text{ и } q \rightarrow 0, \\ \sqrt{\frac{q}{2}} \rightarrow \infty & \text{при } q \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (37)$$

В то же время $\gamma_*(0, q) = \sqrt{1 + q/2}$. Из этого следует, что при $x \neq x_1$ функция (36) имеет минимум. Ее производные по q

$$\frac{\partial \gamma_*}{\partial q} = \frac{1}{2q^2} \frac{q^2 - x_*^2}{\sqrt{4 + x_*^2 + 2q + 2\frac{x_*^2}{q}}}, \quad \frac{\partial^2 \gamma_*}{\partial q^2} = \frac{1}{2q^4} \frac{3x_*^4 + 8x_*^2q + 2x_*^4q + 6x_*^2q^2 - q^4}{\left(4 + x_*^2 + 2q + 2\frac{x_*^2}{q}\right)^{3/2}}. \quad (38)$$

Первая производная отрицательна при $q < |x_*|$ и положительна при $q > |x_*|$, так что минимум всегда имеется при $q_{min} = |x_*|$, если только $x \neq x_1$. Вторая производная в точке минимума

$$\left. \frac{\partial^2 \gamma_*}{\partial q^2} \right|_{q=|x_*|} = \frac{1}{|x_*|} \frac{1}{(|x_*| + 2)^2} \quad (39)$$

положительна, как и должно быть в минимуме. Минимальное значение

$$\gamma_{\min} = \gamma_*(x_*, q_{\min}) = \frac{2 + x_* + |x_*|}{2} = 1 + (x - x_1 + |x - x_1|)/2 = \max(1, 1 + x - x_1). \quad (40)$$

Впрочем, при $x = x_1$ в точке $q = 0$ функция принимает наименьшее возможное значение 1, хотя это не минимум. Минимум равен 1, если $x \leq x_1$, и стремится к 1 при $x \rightarrow x_1 + 0$. При равенстве частот с увеличением q функция строго возрастает.

Для краткости введем ряд обозначений. Обозначим комбинацию частот $Z = |x_*|/(xx_1)$, а также комбинации косинусов углов $a = 1 - \eta\eta_1$ и $b = \sqrt{1 - \eta^2} \sqrt{1 - \eta_1^2}$. Неотрицательность двух последних влечет следствие, что всегда $a - b \leq \sqrt{a^2 - b^2} \leq a + b$ или подробно $1 - \eta\eta_1 - \sqrt{1 - \eta^2} \sqrt{1 - \eta_1^2} \leq |\eta - \eta_1| \leq 1 - \eta\eta_1 + \sqrt{1 - \eta^2} \sqrt{1 - \eta_1^2}$. С такими определениями $1 - \mu = a - b \cos \varphi$.

Качественное поведение функции $\gamma_*(x, x_1, \mu) = \gamma_*(x_*, q)$ при изменении q и азимута φ одинаково, так как

$$\frac{\partial q}{\partial \varphi} = \frac{\partial [xx_1(a - b \cos \varphi)]}{\partial \varphi} = xx_1 b \sin \varphi \geq 0. \quad (41)$$

Итак, существенны три характерных значения величины q : это ее значение в точке минимума $q_{\min} = |x_*|$ и два значения при крайних значениях азимута $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$, равных $q^\pm = xx_1(a \pm b)$, причем всегда $q^+ \geq q^-$.

4.2. Разграничение случаев. Неравенства $q_{\min} > q^+$, $q^- < q < q^+$ и $q < q^-$ равносильны соответствующим неравенствам $Z > a + b$, $a - b < Z < a + b$ и $Z < a - b$.

Еще одно значение Z определяет соотношение между крайними значениями функции. Обозначим значения предела энергии $\gamma_*(x, x_1, \mu)$ на границах значений азимута $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$:

$$\gamma_*^\pm = \gamma_*(x, x_1, \eta\eta_1 \pm \sqrt{1 - \eta^2} \sqrt{1 - \eta_1^2}). \quad (42)$$

Знак разности $\gamma_*^+ - \gamma_*^-$ совпадает со знаком разности $Z - |\eta - \eta_1|$. Из формулы (21) следует, что можно иметь дело с подкоренными выражениями. Разность после сокращений запишется в виде

$$Z^2 \left(\frac{1}{a - b} - \frac{1}{a + b} \right) > 2b, \quad Z^2 > a^2 - b^2 = (1 - \eta\eta_1)^2 - (1 - \eta^2)(1 - \eta_1^2) = (\eta - \eta_1)^2, \quad (43)$$

$$Z > \sqrt{a^2 - b^2} = |\eta - \eta_1|.$$

Доказательство противоположного неравенства просто сводится к замене $>$ на $<$.

Если $q_{\min} < q^-$ или $q_{\min} > q^+$, т.е. $Z < a - b$ и $Z > a + b$, то минимум располагается вне области значений азимута. Если же $q^- \leq q_{\min} \leq q^+$, то

минимум функции $\gamma_*(x, x_1, \mu)$ должен учитываться в расстановке пределов. Если $z > |\eta - \eta_1|$, то $\gamma^+ > \gamma^-$ и наоборот.

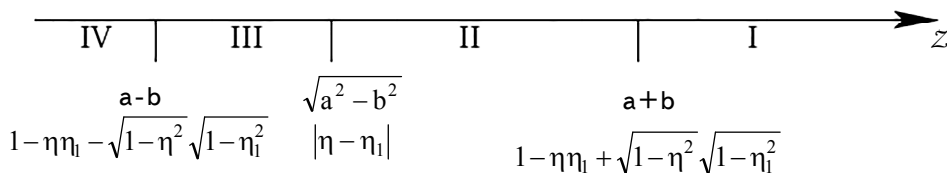


Рис.1. Границы случаев расположения пределов интегралов.

Таким образом, при перестановке интегралов возникают четыре различных случая расположения пределов, которые определяются соотношениями между комбинациями частотных и угловых переменных.

Пределы внутреннего интеграла по азимуту определяются величиной отношения z , а именно тем, в какой из четырех промежутков с границами,

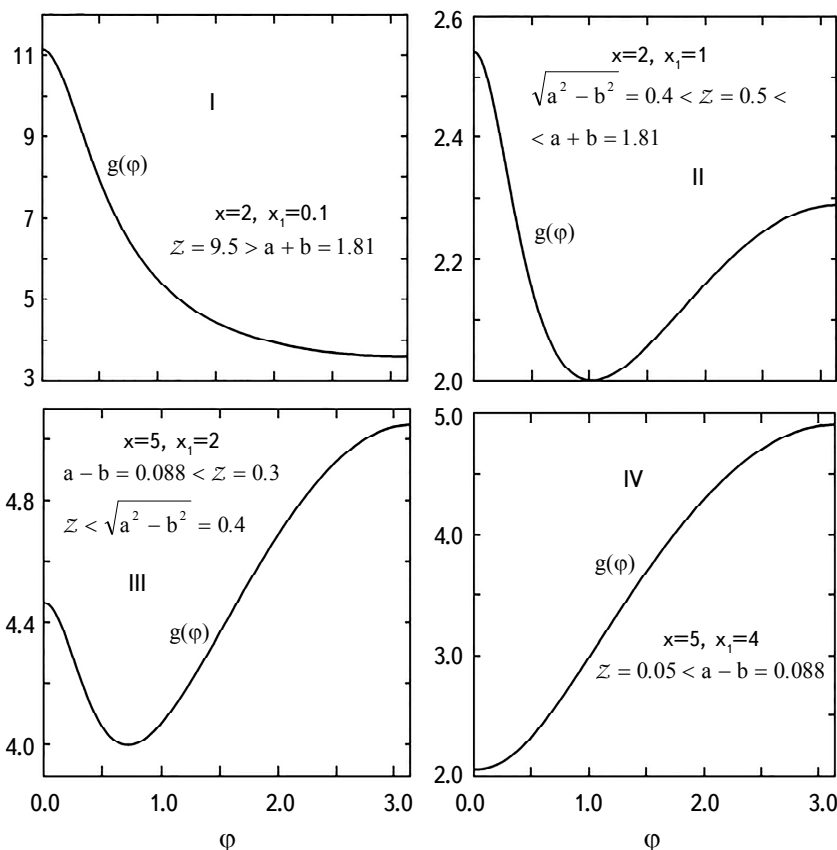


Рис.2. Четыре случая графиков $g(\varphi) = \gamma_*(x, x_1, \eta\eta_1 + \sqrt{1-\eta^2}\sqrt{1-\eta_1^2}\cos\varphi)$ в зависимости от φ .

определяемыми косинусами углов, оно попадает. На рис.1 изображены границы промежутков, попадание в которые отношения Z определяют вид интегралов и их пределов. Случаи пронумерованы справа налево римскими цифрами.

На рис.2 представлены четыре случая расположения кривых, отражающих зависимость от φ функции $g(\varphi) = \gamma_*(x, x_1, \eta\eta_1 + \sqrt{1-\eta^2}\sqrt{1-\eta_1^2}\cos\varphi)$. При $\varphi = 0$ получается значение γ_*^+ , при $\varphi = \pi$ соответственно γ_*^- . Рисунки демонстрируют соотношение между этими значениями при попадании Z в определенные промежутки, соответствующие четырем случаям. Во всех случаях приняты одинаковые значения $\eta = 0.5$ и $\eta_1 = 0.1$, так что $a = 0.95$, $b = 0.86168$, $a - b = 0.088316$, $a + b = 1.81168$, $\sqrt{a^2 - b^2} = \eta - \eta_1 = 0.4$. Четыре случая рисунка соответствуют следующим значениям частот x , x_1 и связанным с ними значениям параметров кривых. I. $x = 2$, $x_1 = 0.1$, $Z = 9.5 > a + b$. II. $x = 2$, $x_1 = 1$, $\sqrt{a^2 - b^2} < Z = 0.5 < a + b$. III. $x = 5$, $x_1 = 2$, $a - b < Z = 0.3 < \sqrt{a^2 - b^2}$. IV. $x = 5$, $x_1 = 4$, $Z = 0.05 < a - b$.

В случаях I и IV функция, обозначенная $g(\varphi)$, строго монотонна, в первом убывает от γ_*^+ до γ_*^- , в другом возрастает в тех же пределах. В случаях II и III эта функция имеет минимум, случаи различаются соотношением между значениями функции $\gamma_*(x, x_1, \mu)$ при крайних значениях азимута.

4.3. *Зависимость μ от γ .* Эта зависимость определяется из уравнения $\gamma_*(x, x_1, \mu) = \gamma > 1$. Вспомнив обозначение $x_* = x - x_1$, запишем это уравнение в виде

$$2\gamma - x_* = \sqrt{4 + x_*^2 + 2q + 2\frac{x_*^2}{q}}. \quad (44)$$

После возведения его в квадрат получается квадратное уравнение относительно q :

$$q^2 - 2(z^2 - \gamma x_*)q + x_*^2 = 0, \quad z = \sqrt{\gamma^2 - 1}. \quad (45)$$

Решения этого уравнения дают два значения q и тем самым два значения косинуса μ :

$$q_{\pm} = z^2 - \gamma x_* \pm zD, \quad D = \sqrt{z^2 - 2\gamma x_* + x_*^2} = \sqrt{(x_* - \gamma - 1)(x_* - \gamma + 1)}, \quad (46)$$

$$\mu^{\pm}(x, x_1, \mu) = 1 - \frac{q_{\pm}}{xx_1}.$$

Подкоренное выражение неотрицательно при $x_* = x - x_1 \leq \gamma - 1$ или при $x_* = x - x_1 \geq \gamma + 1$. Первое условие равносильно тому, что $\gamma \geq \gamma_{min} = 1 + x_*$. Корни отсутствуют при $\gamma - 1 < x_* \leq \gamma + 1$.

Вычислять корни $q_{\pm}$ целесообразно по формулам

$$q_+ = D_0, \quad q_- = \frac{x_*^2}{D_0}, \quad D_0 = z^2 - \gamma x_* + zD. \quad (47)$$

Всегда $q_+ \geq q_-$, так что и $\mu_+ \geq \mu_-$. Действительно, неравенство $D_0 \geq |x_*|$ равносильно

$$\gamma \geq \frac{x_*}{2} + \sqrt{\frac{x_*^2}{4} + 1 + |x_*|} = 1 + \frac{x_* + |x_*|}{2} = \gamma_{\min}, \quad (48)$$

выполнение которого предполагается.

Если $x_* = 0$, то $D = z$, $D_0 = 2z^2$, $q_+ = 2z^2$, $q_- = 0$.

По значениям $\mu_{\pm}$ находятся соответствующие значения азимута:

$$\varphi_{\pm} = \arccos \frac{\mu_{\pm} - \eta\eta_1}{b}, \quad \mu_+ > \mu_-, \quad \varphi_+ > \varphi_-. \quad (49)$$

Углы $\varphi_{\pm}$ подчинены закономерности: угол с плюсом лежит на восходящей части кривых зависимостей $\gamma_*(x, x_1, \mu)$ от φ , а с минусом - на нисходящей.

Конечно, значения $\mu^{\pm}$ должны попадать в свои естественные границы. Для обоих знаков должно быть $-1 \leq \mu_{\mp} \leq 1$, $0 \leq q_{\pm} \leq 2xx_1$. Левые неравенства всегда справедливы, правые могут выполняться для одного или обоих знаков. Условие для бóльшего корня $q_+ = D_0 \leq 2xx_1$ приводит к неравенству $\gamma \leq \gamma_{\text{dv}}(x, x_1)$, где граничное значение

$$\begin{aligned} \gamma_{\text{dv}}(x, x_1) &= \gamma_*(x, x_1, -1) = \gamma_*(x_*, 2xx_1) = \frac{x_*}{2} + \sqrt{(1 + xx_1) \left(1 + \frac{x_*^2}{4xx_1}\right)} = \\ &= \frac{1}{2} \left[x_* + (x + x_1) \sqrt{1 + \frac{1}{xx_1}} \right] = \frac{1}{2} \left[x_* + \sqrt{4 + x_*^2 + 4xx_1 + \frac{x_*^2}{xx_1}} \right]. \end{aligned} \quad (50)$$

При условии $\gamma_{\min} < \gamma < \gamma_{\text{dv}}$ оба корня (47) дают правильные значения косинусов $\mu_{\mp}$. Только меньший обладает этим свойством, если $\gamma \geq \gamma_{\text{dv}}(x, x_1)$.

4.4. Вид интегралов по азимуту. Приведем результаты перемены порядков интегралов в четырех случаях.

Пусть $R(\gamma, \varphi)$ любая из функций, подлежащих усреднению.

Случай I. $Z = \frac{|x - x_1|}{xx_1} > 1 - \eta\eta_1 + \sqrt{1 - \eta^2} \sqrt{1 - \eta_1^2} = a + b$. Из рис. 2 I следует, что

$$\int_0^{\pi} d\varphi \int_{\gamma_*(x, x_1, \mu)}^{\infty} f_e(\gamma) R(\gamma, \varphi) d\gamma = \int_{\gamma_-}^{\gamma_+} f_e(\gamma) d\gamma \int_{\varphi_-}^{\pi} d\varphi R(\gamma, \varphi) + \int_{\gamma_+}^{\infty} f_e(\gamma) d\gamma \int_0^{\pi} d\varphi R(\gamma, \varphi). \quad (51)$$

Случай II. $\sqrt{a^2 - b^2} = |\eta - \eta_1| < Z = \frac{|x - x_1|}{xx_1} < 1 - \eta\eta_1 + \sqrt{1 - \eta^2} \sqrt{1 - \eta_1^2} = a + b$. В этом, более сложном случае, интеграл приходится разбивать на три:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi d\varphi \int_{\gamma_*(x, x_1, \mu)}^\infty f_e(\gamma) R(\gamma, \varphi) d\gamma &= \int_{\gamma_{min}}^{\gamma_*^-} f_e(\gamma) d\gamma \int_{\varphi_-}^{\varphi_+} d\varphi R(\gamma, \varphi) + \\ &+ \int_{\gamma_*^-}^{\gamma_*^+} f_e(\gamma) d\gamma \int_{\varphi_-}^\pi d\varphi R(\gamma, \varphi) + \int_{\gamma_*^+}^\infty f_e(\gamma) d\gamma \int_0^\pi d\varphi R(\gamma, \varphi). \end{aligned} \quad (52)$$

Случай III. $a-b=1-\eta\eta_1+\sqrt{1-\eta^2}\sqrt{1-\eta_1^2}<\mathcal{Z}=\frac{|x-x_1|}{xx_1}<|\eta-\eta_1|=\sqrt{a^2-b^2}$.

Тоже разбиваем на три интеграла, но пределы другие:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi d\varphi \int_{\gamma_*(x, x_1, \mu)}^\infty f_e(\gamma) R(\gamma, \varphi) d\gamma &= \int_{\gamma_{min}}^{\gamma_*^+} f_e(\gamma) d\gamma \int_{\varphi_-}^{\varphi_+} d\varphi R(\gamma, \varphi) + \\ &+ \int_{\gamma_*^+}^{\gamma_*^-} f_e(\gamma) d\gamma \int_0^{\varphi_+} d\varphi R(\gamma, \varphi) + \int_{\gamma_*^-}^\infty f_e(\gamma) d\gamma \int_0^\pi d\varphi R(\gamma, \varphi). \end{aligned} \quad (53)$$

Случай IV. $\mathcal{Z}=\frac{|x-x_1|}{xx_1}<1-\eta\eta_1-\sqrt{1-\eta^2}\sqrt{1-\eta_1^2}=a-b$. В этом последнем случае

$$\int_0^\pi d\varphi \int_{\gamma_*(x, x_1, \mu)}^\infty f_e(\gamma) R(\gamma, \varphi) d\gamma = \int_{\gamma_*^+}^{\gamma_*^-} f_e(\gamma) d\gamma \int_0^{\varphi_+} d\varphi R(\gamma, \varphi) + \int_{\gamma_*^-}^\infty f_e(\gamma) d\gamma \int_0^\pi d\varphi R(\gamma, \varphi). \quad (54)$$

4.5. Вырожденные случаи. Наряду с перечисленными четырьмя характерными случаями расположения пределов интегралов, имеются некоторые выделенные случаи, не подпадающие под общую схему. Укажем их.

Один необычный случай возникает, когда оказывается $\eta_1 = \eta$. Тогда $a=b$, $a-b=\sqrt{a^2-b^2}=0$, т.е. сливаются границы между случаями II и III. Остаются всего две границы: левая 0 и правая $2a=2(1-\eta^2)$. Отношение $\mathcal{Z}$ может принимать значения: крайнее $\mathcal{Z}=0$, промежуточные - между границами $\mathcal{Z}=2\alpha a$, $0<\alpha\leq 1$, тогда осуществляется случай II, и $\mathcal{Z}>2a$ - случай I, оба с определенными соотношениями между частотами. Случай $\mathcal{Z}=0$ заслуживает отдельного рассмотрения.

При $\mathcal{Z}=0$ частоты равны и уравнение (44) сводится к

$$\begin{aligned} \gamma_*(x, x, \mu) &= \gamma_*(0, q) = \sqrt{1+\frac{q}{2}} = \gamma, \quad 1-\mu = 2\frac{z^2}{x^2}, \\ \cos\varphi &= \frac{a-2z^2/x^2}{b}, \quad \frac{a-b}{2} \leq \frac{z^2}{x^2} \leq \frac{a+b}{2}. \end{aligned} \quad (55)$$

Это случай IV, но вырожденный. Интеграл получается таким

$$\int_0^\pi d\varphi \int_{\gamma_*(x, x, \mu)}^\infty f_e(\gamma) R(\gamma, \varphi) d\gamma = \frac{\sqrt{1+x^2(a+b)/2}}{\sqrt{1+x^2(a-b)/2}} \int_{\gamma_{min}}^{\gamma_+^+} f_e(\gamma) d\gamma \int_0^{\arccos([a-2z^2/x^2]/b)} R(\gamma, \varphi) d\varphi + \int_{\gamma_{min}}^\infty f_e(\gamma) d\gamma \int_0^\pi R(\gamma, \varphi) d\varphi. \quad (56)$$

Если выполняется еще и условие предыдущего абзаца, т.е. если $\eta_1 = \eta$, то $a = b$ и интегралы очевидным образом упрощаются.

Если $\mathcal{Z}$ попадает на границу между случаями, то тоже происходят уточнения пределов. При $\mathcal{Z} = |\eta - \eta_1|$ сливаются случаи II и III: границы γ получаются равными, т.е. $\gamma_*^+ = \gamma_*^-$, и попадают они на границы азимута. Утверждение следует из рассуждения, приведенного для доказательства неравенства (43). Интеграл будет содержать не три части, а только две:

$$\int_0^\pi d\varphi \int_{\gamma_*(x, x, \mu)}^\infty f_e(\gamma) d\gamma R(\gamma, \varphi) = \int_{\gamma_{min}}^{\gamma_*^+} f_e(\gamma) d\gamma \int_{\varphi_-}^{\varphi_+} R(\gamma, \varphi) d\varphi + \int_{\gamma_*^+}^\infty f_e(\gamma) d\gamma \int_0^\pi R(\gamma, \varphi) d\varphi. \quad (57)$$

Если параметр $\mathcal{Z}$ попадает на границы $a - b$ или $a + b$, то кривые функции $\gamma_*(x, x_1, \mu)$ в своих нижних точках будут достигать границ изменения азимута и касаться соответствующего уровня минимума γ_{min} , т.е. точки минимума располагаются при $\varphi = 0$ или $\varphi = \pi$. Односторонние производные на границах изменения азимута обращаются в нули.

Для облегчения вычисления интегралов (33) изучим особенности входящих в них функций.

5. Особенности ФП и углов поворота.

5.1. Особенности ФП при рассеянии вперед. Когда рассеяние происходит под углами, близкими к нулю или к π , т.е. когда μ около ± 1 , некоторые слагаемые в выражениях для ФП оказываются почти равными по модулю, но входят с разными знаками и при вычислении интегралов по азимуту происходит потеря точности. Чтобы этого избежать, преобразуем приведенные выражения. Рассмотрим сначала рассеяние вперед.

Слагаемое $2/Q$, которое входит в выражение функции (25), а также в R_b и, следовательно, в R_Q , R_V и R , является самым сингулярным и будет рассмотрено ниже. Если это слагаемое выделить, то все ФП при $\mu \rightarrow 1$ стремятся к нулю и могут быть представлены в виде, исключающем потери точности при их вычислении.

Положим $1 - \mu = u^2$. Тогда

$$q = xx_1 u^2, \quad Q^2 = (x - x_1)^2 + 2xx_1 u^2, \quad r = \frac{2 - u^2}{u^2}, \quad a_\pm = \frac{b_\pm}{u}, \quad b_\pm = \sqrt{2 + (\gamma_\pm^2 - 1)} u^2, \quad (58)$$

и после перегруппировки и объединения некоторых слагаемых ФП R_a и R_c , а также несингулярная часть R_b (отмечаем эти части титлом) примут регуляризованную форму:

$$\begin{aligned} \tilde{R}_a = R_a = & \frac{x+x_1}{xx_1} \frac{\gamma_+ + \gamma_-}{b_+^3 b_-^3 (b_+ + b_-)} \times \\ & \times \left[(2-u^2)(b_+^2 + b_+ b_- + b_-^2) - (x+x_1) \frac{\gamma_+ b_-^2 (b_- + 2b_+) - \gamma_- b_+^2 (b_+ + 2b_-)}{xx_1 (b_+ + b_-)} \right] u, \end{aligned} \quad (59)$$

$$R_b - \frac{2}{Q} = -\frac{2-q}{xx_1} \frac{(x+x_1)(\gamma_+ + \gamma_-)}{b_+ b_- (b_+ + b_-)} u, \quad R_c = -2 \frac{(x+x_1)^3}{x^2 x_1^2} \frac{(\gamma_+ + \gamma_-)^2}{b_+ b_- (b_+ + b_-)^2} \frac{u}{\gamma_+ b_- + \gamma_- b_+}. \quad (60)$$

Более длинной получается несингулярная часть $\tilde{R}_U = R_U - 2/Q$, включающая также R_c :

$$\begin{aligned} \tilde{R}_U = & \frac{4(x+x_1)^2}{x^2 x_1^2 (2-u^2)^2} \left[Q - \frac{\gamma_+ + \gamma_-}{(b_+ + b_-)^2} [\gamma_+ (2b_- + b_+) - \gamma_- (2b_+ + b_-)] u \right] + \\ & + 2R_c + 2 \frac{x+x_1}{xx_1} \frac{\gamma_+ + \gamma_-}{b_+ + b_-} \left(\frac{2}{2-u^2} + \frac{1}{b_+ b_-} \right) u. \end{aligned} \quad (61)$$

5.2. Рассеяние назад. Особенности в ФП могут возникать и в случае, когда рассеяние происходит в сторону, противоположную первоначальному направлению фотона, т.е. при $\mu = -1$. Это возможно, если $\eta_1 = -\eta$ и $\varphi = \pi$. Тогда обращается в нуль отношение r (13), стоящее в выражениях для ФП R_c и R_U в знаменателе. В обеих ФП возникают неопределенности, которые требуется раскрыть.

Впрочем, преобразованное для рассеяния вперед выражение (60) для функции R_c уже на содержит особенного знаменателя и может быть использовано и при μ , близких к -1 .

Для другой ФП с целью сокращения записи приходится ввести ряд вспомогательных обозначений:

$$Q_1 = \frac{1}{4} \frac{\frac{(x-x_1)^4}{(x+x_1)^2}}{\sqrt{(x+x_1)^2 + (x-x_1)^2} r + (x+x_1) + \frac{1}{2} \frac{(x-x_1)^2}{x+x_1} r}, \quad (62)$$

$$Q_2 = \frac{1}{4} \frac{3-r}{\sqrt{1+r}} \frac{1}{1 + \left(1 - \frac{r}{2}\right) \sqrt{1+r}},$$

$$\mathcal{A}_1 = \frac{\frac{3}{2} \gamma_+^2 + 2r}{a_+^3 + \gamma_+^3 + \frac{3}{2} \gamma_+ r} - \frac{\frac{3}{2} \gamma_-^2 + 2r}{a_-^3 + \gamma_-^3 + \frac{3}{2} \gamma_- r}, \quad \mathcal{A}_2 = \frac{\gamma_+^2 + \gamma_-^2 + r}{(a_+ + \gamma_+)(a_- + \gamma_-)(\gamma_+ \gamma_- + a_+ a_-)}. \quad (63)$$

$$Q_3 = (x + x_1)Q_2 - Q_1 \left(1 - \frac{r}{2} \right) - \frac{1}{2} \frac{(x - x_1)^2}{x + x_1} (-Q_2 r) \frac{Q_1}{2} r - Q_1 Q_2 r^2, \quad (64)$$

$$\mathcal{A}_3 = \mathcal{A}_1 + 3(x + x_1)\mathcal{A}_2 + (x + x_1)^2 Q_3.$$

Тогда регулярная часть R_U предстанет в виде

$$\tilde{R}_U = R_U - \frac{2}{Q} = 2R_c + \frac{x + x_1}{xx_1}(1 + r) \times$$

$$\times \left\{ \frac{1}{a_+ + a_-} \left[\frac{\gamma_+ + \gamma_-}{a_+ a_-} - 2 \left(\frac{1}{a_+ + \gamma_+} + \frac{1}{a_- + \gamma_-} \right) \right] - 2 \right\} + \frac{(1 + r)^2}{x^2 x_1^2} \mathcal{A}_3. \quad (65)$$

Формально особенность при рассеянии назад возникает и в частях ФП R_a и R_b , но только в исключительном случае, когда $\gamma = x$ и $\eta_1 = -\eta$. Тогда сумма $1 + \mu = (1 - \eta^2)(1 + \cos\varphi)$ становится равной нулю при $\eta = 1$ и/или $\varphi = \pi$, а обе функции и их сумма обращаются в бесконечность. Однако при $\mu = -1$ не может достигаться $\gamma = x$.

Действительно, неравенство (см. (21))

$$\gamma = x \geq \gamma(x, x_1, -1), \quad x \geq \frac{x - x_1}{2} + \frac{x + x_1}{2} \sqrt{1 + \frac{1}{xx_1}}, \quad \frac{x + x_1}{2} \geq \frac{x + x_1}{2} \sqrt{1 + \frac{1}{xx_1}} \quad (66)$$

возможно лишь при $xx_1 = \infty$.

5.3. Особенности функций углов поворота. В три функции, являющиеся элементами матрицы (34) (кроме $R(x, x_1, \mu, \gamma)$), входят косинусы и синусы двойных углов поворота поляризационных базисов. Эти функции представляются дробями, знаменатели которых содержат множители $1 - \eta^2$, $1 - \eta_1^2$ и $1 - \mu^2$. Поэтому при вычислении интегралов по азимуту следует соблюдать осторожность, чтобы не попасть на особенность в подынтегральной функции. Особенно это относится к функции, находящейся в правом нижнем углу матрицы, так как она содержит слагаемое, имеющее в знаменателе функцию Q , а также произведение всех неприятных множителей, т.е. произведение $(1 - \eta^2)(1 - \eta_1^2)(1 - \mu^2)^2$. Конечно, входящие в выражения элементов матрицы косинусы, естественно, не превосходят по модулю единицы, однако числители и знаменатели представляющих их дробей содержат обращающиеся в нуль множители, которые надо сократить аналитически. Это здесь и прodelывается.

Самым простым является случай, когда три вектора $\vec{\omega}$, $\vec{\omega}_1$ и $\vec{l}$ лежат в одной плоскости. Условием этого по (8) служит равенство $\sin\theta\sin\theta_1\sin(\varphi_1 - \varphi) = 0$. Тогда, согласно (4), $\sin(2\chi) = \sin(2\chi_1) = 0$, $\cos(2\chi) = \cos(2\chi_1) = 1$. Этот случай тривиален и его исключим из дальнейшего.

Начнем опять с рассеяния вперед и положим $\theta_1 = \theta + \delta$. Для простоты будем считать, что $\varphi_1 = 0$. Тогда

$$\begin{aligned}\mu &= \cos\theta\cos\theta_1 + \sin\theta\sin\theta_1 - \sin\theta\sin\theta_1(1 - \cos\varphi) = \\ &= \cos\delta - \sin\theta(\sin\theta\cos\delta + \cos\theta\sin\delta)2\sin^2\frac{\varphi}{2},\end{aligned}\quad (67)$$

$$1 - \mu = 2\sin^2\frac{\delta}{2} + 2\sin\theta\sin\theta_1\sin^2\frac{\varphi}{2}, \quad 1 + \mu = 2\cos^2\frac{\delta}{2} - 2\sin\theta\sin\theta_1\sin^2\frac{\varphi}{2}. \quad (68)$$

Ясно, что при $\delta \rightarrow 0$ и $\varphi \rightarrow 0$ будет $1 - \mu \rightarrow 0$.

Стремление к нулю азимута φ и разности между углами $\delta = \theta_1 - \theta$ может происходить независимо, но свяжем их соотношением со следствиями

$$\sin\frac{\delta}{2} = s\sin\theta\sin\frac{\varphi}{2}, \quad \cos\frac{\delta}{2} = \sqrt{1 - s^2\sin^2\theta\sin^2\frac{\varphi}{2}}. \quad (69)$$

Обозначим также отношение мало различающихся синусов

$$S = \frac{\sin\theta_1}{\sin\theta} = 1 + 2s\left(\cos\theta\cos\frac{\delta}{2} - s\sin^2\theta\sin\frac{\varphi}{2}\right)\sin\frac{\varphi}{2}. \quad (70)$$

Тогда функции углов поворота χ и χ_1

$$\sin\chi = -\frac{S\cos\frac{\varphi}{2}}{\mathcal{D}}, \quad \cos\chi = \frac{S\cos\theta\sin\frac{\varphi}{2} - s\cos\frac{\delta}{2}}{\mathcal{D}}, \quad (71)$$

$$\sin\chi_1 = \frac{\cos\frac{\varphi}{2}}{\mathcal{D}}, \quad \cos\chi_1 = \frac{\cos\theta_1\sin\frac{\varphi}{2} - s\cos\frac{\delta}{2}}{\mathcal{D}}. \quad (72)$$

Здесь

$$\mathcal{D} = \sqrt{(s^2 + S)\left[1 - (s^2 + S)\sin^2\theta\sin^2\frac{\varphi}{2}\right]}. \quad (73)$$

Как и у ФП, особенность возникает у углов поворота и при рассеянии назад, когда $\eta_1 = -\eta$, $\varphi = \pi$. Пусть $\theta_1 = \pi - \theta - \delta$, δ мало. Рассмотрим азимуты, близкие к π , т.е. введем близкое к нулю $\phi = \pi - \varphi$. Тогда малым оказывается $\cos\varphi/2 = \sin\phi/2$. Снова положим $\sin\delta/2 = s\sin\theta\sin\phi/2$.

В регуляризованном виде эти же функции совершенно схожи с получающимися при рассеянии вперед:

$$\sin\chi = -\frac{S\cos\frac{\phi}{2}}{\mathcal{D}}, \quad \cos\chi = \frac{s\cos\frac{\delta}{2} - S\cos\theta\sin\frac{\phi}{2}}{\mathcal{D}}. \quad (74)$$

Но, конечно, здесь вместо φ стоит ϕ , как и в выражениях для S и $\mathcal{D}$. Для второго угла

$$\cos\chi_1 = \frac{s\cos\frac{\delta}{2} - \cos\theta_1\sin\frac{\phi}{2}}{\mathcal{D}}, \quad \sin\chi_1 = \frac{\cos\frac{\phi}{2}}{\mathcal{D}}. \quad (75)$$

Функции двойных углов вычисляются по известным их выражениям.

5.4. *Особенность слагаемого $2/Q$.* Как уже говорилось, наиболее сингулярным является первое слагаемое в выражениях для R_b и $R_{b'}$. Оно не зависит от энергии электрона, так что интеграл от него по энергии равен просто ему самому, умноженному на интеграл от ФР в пределах от $\gamma_*(x, x_1, \mu)$ до бесконечности. Нижний предел этого интеграла ведет себя по-разному при $x \neq x_1$ и $x = x_1$. Действительно, легко увидеть, что при $q = \mu x_1(1 - \mu) \rightarrow 0$

$$\gamma_*(x, x_1, \mu) = \frac{1}{2} \left[x - x_1 + \sqrt{(x - x_1)^2 + 2q + 2 \frac{(x - x_1)^2}{q} + 4} \right] \rightarrow \begin{cases} \infty, & \text{если } x \neq x_1, \\ 1, & \text{если } x = x_1. \end{cases} \quad (76)$$

Поэтому, так как ФР должна убывать с ростом энергии достаточно быстро при $q \rightarrow 0$

$$\frac{2}{Q} \int_{\gamma_*(x, x_1, \mu)}^{\infty} f_e(\gamma) d\gamma \rightarrow \begin{cases} 0, & \text{если } x \neq x_1, \\ \infty, & \text{если } x = x_1. \end{cases} \quad (77)$$

Интеграл по x при закреплённом q конечен и от q не зависит. Действительно,

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2q}} \int_{x + \sqrt{x^2(1+2/q) + 2q + 4}}^{\infty} f_e(\gamma) d\gamma = \\ & = \int_1^{\infty} f_e(\gamma) d\gamma \int_{-q\gamma - z\sqrt{x^2 + 2q}}^{-q\gamma + z\sqrt{x^2 + 2q}} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2q}} = \int_1^{\infty} f_e(\gamma) d\gamma \ln \frac{\gamma + z}{\gamma - z}. \end{aligned} \quad (78)$$

Все это означает, что произведение (77) пропорционально $\delta(x - x_1)$, т.е. сингулярно, причем коэффициентом пропорциональности является интеграл (78). Но именно от рассматриваемого слагаемого интеграл по азимуту удастся выразить через известные специальные функции. Результат и вычисления будут приведены во второй части работы.

COMPTON SCATTERING IN PLANE MEDIA: POLARIZATION OF RADIATION AND AZIMUTH INDEPENDENCE. I. THEORY

D.I.NAGIRNER, S.I.GRACHEV

The Compton scattering of polarized radiation by nondegenerate and nonpolarized electron gas is considered. For photon of definite momentum two polarization bases are introduced: external connected with the geometry of medium and internal connected with scattering act. Beginning from general relativistic kinetic equation which describes multiple action of the mechanism and takes into account induced scattering we show that describing of time- and azimuth independent radiation field in plane slab two Stocks parameters of linear polarization are sufficient. The singularities are exposed of functions describing redistribution of radiation in frequency and direction and rotation angles between bases when photons are scattered forward and backward. The algorithm is proposed for elimination of singularities during azimuth averaging.

Keywords: *radiative transfer: Stokes parameters: Compton scattering: frequency redistribution functions*

ЛИТЕРАТУРА

1. Ch.D.Dermer, G.Menon, High Energy Radiation from Black Holes. Gamma Rays, Cosmic Rays, and Neutrinos. Princeton Series in Astrophysics. Princeton University Press. Princeton and Oxford. 2009, p.538.
2. D.I.Nagirner, J.Poutanen, Space Phys. Rev., **9**, 1, 1994.
3. D.I.Nagirner, J.Poutanen, Astron. Astrophys., **379**, 664, 2001.
4. D.I.Nagirner, J.J.Poutanen, Astron. Astrophys., **275**, 325, 1993.