АСТРОФИЗИКА

ТОМ 65 ФЕВРАЛЬ, 2022 ВЫПУСК 1

DOI: 10.54503/0571-7132-2022.65.1-95

ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ В ЗАВИСЯЩИХ ОТ ВРЕМЕНИ ЗАДАЧАХ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ

А.Г.НИКОГОСЯН

Поступила 19 января 2022

Рассмотренная автором классическая задача переноса излучения о выходе кванта из полубесконечной рассеивающей и поглощающей атмосферы обобщается на случай, когда принимается в расчет время, расходуемое квантами на многократное рассеяние в ней. Ставится вопрос о возможности вариационной формулировки задачи и обобщении квадратичных и билинейных законов сохранения, полученных в стационарной задаче. Показывается, что при общей постановке задача не допускает указанную формулировку ввиду непотенциальности появляющегося дифференциального оператора, однако она представляется возможной в частном случае консервативного рассеяния. Полученные два закона сохранения отражают факт однородности среды и изотропности времени.

Ключевые слова: *зависящий от времени перенос излучения: вариационная задача: канонические уравнения: принцип Гамильтона: законы сохранения*

1. *Введение.* Изучение того или иного физического явления обычно начинается с его описания, моделирования и сведения в конечном счете к решению некоторой математической задачи при определенных начальных или граничных условиях. Это обычно предшествует попыткам формулировать вариационный принцип и найти такой функционал, стационарные точки которого соответствовали полученным описательным уравнениям. Последнее известно как обратная задача вариационного исчисления, основным вопросом которой является само существование такого функционала. Ответ на него был дан Вайнбергом [1], который показал, что для его существования необходимо, чтобы соответствующий оператор в уравнениях был самосопряженным (потенциальным). В работе [2] данный результат был обобщен на случай интегро-дифференциальных уравнений, с которыми часто приходится иметь дело в теории переноса излучения. Вычислительные формулы для проверки потенциальности операторов были предложены в [3,4].

Существовали две разные тенденции в оценке вариационного подхода. С одной стороны, высказывалось мнение, что вариационный подход в общей сложности несет в себе немного дополнительной информации и не имеет самостоятельного значения, в то же время выдвигалось и противоположное мнение, считающее, что исследование явлений следует начинать рассматривать именно в рамках вариационного подхода.

В области теории переноса излучения такой точки зрения придерживался, в частности, Прайзендорфер [5], считающий, что данная теория должна основываться на принципе инвариантности Амбарцумяна, из которого в качестве некоторых законов должны вытекать уравнения переноса излучения. На самом деле вариационный интеграл и плотность Лагранжиана содержат важную информацию о наиболее общих свойствах и закономерностях, присущих задаче, о симметрии и связанных с нею законах сохранения и т.д. Считается, что в некоторых задачах, как, например, в задачах физики сплошной среды, вариационный путь является наиболее строгим подходом к их решению [6].

Первые работы по применению вариационного подхода в задачах теории переноса излучения [7-9] появились в связи с вопросом, поднятым Райбики в [10,11] в связи с полученными им нелинейными интегралами уравнений переноса. Появление наряду с классическими H и K - интегралами Q и R (в обозначениях автора) квадратичных и билинейных интегралов диктовало необходимость выявления их физического смысла, хотя имелись подозрения, что последние каким-то образом могут быть связаны с принципом инвариантности. В дальнейшем эти результаты были обобщены в [12,7]. В первом из них были получены, так называемые, двухточечные интегралы, которые связывали между собой одинаково направленные интенсивности на разных глубинах в среде, а во втором получены еще более общие двухточечные билинейные соотношения, которые устанавливали связь между полями излучения, относящимися к средам с отличающимися оптическими толщинами. Важно подчеркнуть, что вывод нелинейных интегралов в работе [7] опирался на известное уравнение Амбарцумяна для функции отражения от полубесконечной атмосферы, полученное им на основе физических рассуждений с использованием сформулированного им принципа инвариантности [13,14], именно поэтому изучаемые нелинейные соотношения также можно вывести аналогичным способом непосредственно. Также в работе [7] было показано, что существует группа задач переноса излучения, решения которых связаны между собой нелинейными соотношениями и рядом других общих свойств. Попытки физической интерпретации получаемых квадратичных соотношений были сделаны в [15].

Основной целью настоящей работы является применение вариационного принципа к типичной, зависящией от времени, задаче теории переноса излучения в полубесконечной атмосфере. Насколько нам известно, такого рода попытка в теории нестационарного переноса излучения делается впервые. Сначала во втором разделе коротко напоминаются результаты, полученные ранее для стационарной задачи, однако приводится и ряд новых результатов, в частности, дается вывод системы канонических уравнений, обсуждаются возможные физические трактовки получаемого закона сохранения. Аналогичная задача с учетом зависимости от времени рассматривается в третьем разделе. В *Заключении* обсуждаются роль и значение полученных уравнений и соответствующих законов сохранения для теории переноса излучения в целом.

2. *Стационарная задача переноса лучистой энергии в поглощающей и изотропно рассеивающей полубесконечной атмосфере.* Вариационная формулировка задачи была дана нами в работе [9]. Отсылая читателя за подробностями к упомянутой работе, приведем здесь часть полученных в ней результатов с некоторыми дополнениями, необходимыми для дальнейшего изложения.

Рассматривается классическая задача об определении вероятности $P(\tau, \eta, \mu)$ выхода из среды кванта, первоначально движущегося в ней на заданной глубине τ в некотором направлении η (μ - косинус угла выхода, отсчитываемого от внешней нормали среды). Важность задачи очевидна и заключается в том, что ее решение позволяет определить поле выходящего из среды излучения при любом распределении внутренних стационарных источников энергии. Решение уравнения переноса излучения сводится к интегро-дифференциальному уравнению

$$\eta^2 \frac{d^2 \Phi}{d\tau^2} = \Phi(\tau, \eta, \mu) - \lambda \int_0^1 \Phi(\tau, \eta', \mu) d\eta', \tag{1}$$

где $\Phi(\tau, \eta, \mu) = P(\tau, +\eta, \mu) + P(\tau, -\eta, \mu)$. Самосопряженность операторов в (1) легко проверяема, поэтому согласно [2,8] вариационная формулировка задачи возможна и сводится к рассмотрению функционала

$$S = \int L(\Phi, \Phi', \tau, \eta, \mu) d\tau. \tag{2}$$

Впервые вариационный принцип в задаче переноса излучения был применен в [16] с использованием обобщения теоремы Нетера, данного в [2]. Для рассматриваемой здесь задачи плотность Лагранжиана имеет вид

$$L(\Phi, \Phi', \tau, \eta, \mu) = \Phi^2 + (\eta\Phi')^2 - 2\Phi U, \tag{3}$$

где для краткости введено обозначение

$$U(\tau, \mu) = \frac{\lambda}{2} \int_0^1 \Phi(\tau, \eta', \mu) d\eta'. \tag{4}$$

Мы видим, что как уравнение переноса, так и плотность Лагранжиана явным образом не зависят от оптической глубины, другими словами, τ является циклической переменной и форма соотношений (1), (3) инвариантна относительно сдвига пространственной координаты. Легко понять, что физически это является следствием предположения об однородности среды. В соответствии с (1) и (2) уравнение Эйлера-Лагранжа представляется в виде

$$\frac{\partial L}{\partial \Phi}-\frac{d}{d\tau}\frac{\partial L}{\partial \Phi'}+\lambda\int_0^1\frac{\partial L}{\partial U}d\eta'=0. \tag{5}$$

Сдвиг оптической глубины является преобразованием симметрии, поэтому, в согласии с принципом Гамильтона имеет место закон сохранения. Путь установления законов сохранения непосредственно из выражения вариационного интеграла дается теоремой Нетера, см. например, [17]. В данном случае

$$\mathrm{H}=\int_0^1 H d\eta=\int_0^1\left[L-\frac{\partial L}{\partial \Phi}\Phi'\right]d\eta=\mathrm{const}, \tag{6}$$

где H - функция Гамильтона. В развернутом виде интеграл (6) перепишется в виде

$$\int_0^1\left[\Phi^2(\tau,\eta,\mu)-\eta^2\Phi'^2(\tau,\eta,\mu)-2U(\tau,\mu)\Phi(\tau,\eta,\mu)\right]d\eta=\mathrm{const} \tag{7}$$

или

$$\int_0^1 P(\tau,\eta,\mu)P(\tau,-\eta,\mu)d\eta=\frac{\lambda}{4}\left(\int_{-1}^1 P(\tau,\eta,\mu)d\eta\right)^2+\mathrm{const}. \tag{8}$$

Полученный закон сохранения является аналогом закона сохранения количества движения в классической механике [18]. Для полубесконечной атмосферы значение произвольной постоянной равно нулю, и мы приходим к соотношению, вытекающего из принципа инвариантности Амбарцумяна. С другой стороны, оно является аналогом квадратичного Q - интеграла, полученного в [10] непосредственно из уравнений переноса. Заметим, что уравнение переноса и плотность Лагранжиана явным образом не зависят также от переменной μ, чему соответствует аналог закона сохранения момента количества движения.

Полученный закон сохранения физически может быть истолкован поразному. Например, одна из возможных трактовок вытекает из соотношения (8) в случае полубесконечной атмосферы, если записать его в виде (см., также [19])

$$\int_{-1}^1 P(\tau,\eta,\mu)P(\tau,-\eta,\mu)d\zeta\Bigg/\left(\int_{-1}^1 P(\tau,\eta,\mu)d\zeta\right)^2=\frac{\lambda}{2}. \tag{9}$$

Выражение в левой части представляет собой коэффициент корреляции между вероятностями выхода из среды квантов, движущихся в среде в двух взаимно противоположных направлениях, и его значение независимо от глубины в однородной атмосфере задается величиной λ.

Другую физическую трактовку можно дать на основе соотношения (7), предварительно записав его в виде

$$\lambda\int_0^1 \Phi^2(\tau,\eta,\mu)d\eta - 4U^2(\tau,\mu) = \int_0^1 \eta^2\Phi'^2(\tau,\eta,\mu)d\eta. \tag{10}$$

Данное равенство содержит квадратично функцию поля Φ и ее производную по глубине в атмосфере. Выражение слева характеризует энергию поля излучения на той или иной глубине среды (аналог потенциальной энергии), в то же время величина в правой части описывает энергию потока излучения (аналог кинетической энергии). Если перейти от вероятностей к интенсивностям, то равенство (10) показывает баланс между содержанием лучистой энергии на данной глубине и его изменением с глубиной.

Следует отметить, что в теории переноса излучения и ее приложениях, в том числе в астрофизике, хорошо известны различные уравнения или соотношения, полученные математическим путем или непосредственно на основе физических рассуждений, которые представляют собой не что иное, как частные случаи законов сохранения. Одним из таких примеров является хорошо известное в астрофизике уравнение для коэффициента отражения от полубесконечной атмосферы, полученное применением принципа инвариантности [13,20,21].

В заключение данного раздела приведем также, так называемую, каноническую систему уравнения Эйлера. Для этого введем обозначение $p = \partial L/\partial\Phi'$. Тогда с учетом того, что $H = L - (\partial L/\partial\Phi)\Phi'$, находим

$$\frac{d\Phi}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial p}. \tag{11}$$

Это и есть первое из искомых уравнений канонической системы. Для получения второго уравнения вычислим производную p по оптической глубине

$$\frac{dp}{d\tau} = \frac{d}{d\tau}\frac{\partial L}{\partial\Phi'} = \frac{\partial L}{\partial\Phi} + \frac{\lambda}{2}\int_0^1 \frac{\partial L}{\partial U}d\eta = \frac{\partial H}{\partial\Phi} + \frac{\lambda}{2}\int_0^1 \frac{\partial H}{\partial U}d\eta \tag{12}$$

или

$$\frac{dp}{d\tau} = \frac{\partial H}{\partial\Phi} - 2U. \tag{13}$$

Уравнения (11) и (13) образуют искомую каноническую систему уравнения Эйлера.

3. *Зависящая от времени задача о переносе излучения в полубесконечной среде.* В настоящем разделе мы обсудим вопрос о возможности вариационной формулировки задачи переноса излучения, являющейся аналогом рассмотренной выше стационарной задачи, когда

принимается в расчет время, расходуемое квантами в процессе многократного рассеяния в среде.

В данном случае уравнение переноса записывается в виде

$$\frac{1}{c}\frac{dP}{dt} = -\alpha P + \varepsilon, \tag{14}$$

где α и ε - объемные коэффициенты поглощения и излучения. Будем считать, что кванты при диффузии в среде тратят время как на пребывание в поглощенном состоянии, так и на пробег между двумя последовательными актами рассеяния. Средние времена, соответствующие двум указанным процессам, обозначим через t_1 и t_2. Тогда для оператора дифференцирования имеем

$$\frac{d}{dt} = \frac{t_1}{t_1 + t_2}\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial s}, \tag{15}$$

где s - пространственная координата вдоль направления распространения излучения. Уравнение (14) приобретет вид

$$\frac{1}{c}\frac{t_1}{t_1 + t_2}\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial s} = -\alpha P + \varepsilon. \tag{16}$$

Деля обе части уравнения на α, с учетом того, что $t_2 = 1/\alpha c$ [19], получим

$$\frac{t_1 t_2}{t_1 + t_2}\frac{\partial P}{\partial t} - \eta\frac{\partial P}{\partial \tau} = -P + \frac{\varepsilon}{\alpha}, \tag{17}$$

где мы ввели оптическую глубину τ так, что $\alpha\partial s = -\partial\tau/\eta$. Как было показано в [23], величина $\bar{t} = t_1 t_2/(t_1 + t_2)$ представляет собою среднее время, проводимое фотонами в среде с учетом обоих вышеуказанных процессов траты времени. Введя безразмерную временную переменную $\omega = t/\bar{t}$, находим

$$\frac{\partial P}{\partial \omega} - \eta\frac{\partial P}{\partial \tau} = -P(\tau, \omega, \eta, \mu) + \frac{\lambda}{2}\int_{-1}^{1} P(\tau, \omega, \eta', \mu)\, d\eta', \tag{18}$$

где учтено, что в рассматриваемой задаче

$$\frac{\varepsilon}{\alpha} = \frac{\lambda}{2}\int_{-1}^{1} P(\tau, \omega, \eta', \mu)\, d\eta'. \tag{19}$$

Для случая консервативного рассеяния нетрудно получить аналоги известных H и K - интегралов (см. также [22])

$$\frac{\partial J}{\partial \omega} = \frac{1}{4}\frac{\partial F}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial K}{\partial \tau} = \frac{1}{4}\left(F + \frac{\partial F}{\partial \omega}\right), \tag{20}$$

где

$$J = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} P\, d\eta, \quad H = \pi F = 2\pi\int_{-1}^{1} P\eta\, d\eta, \quad K = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} P\eta^2\, d\eta. \tag{21}$$

Обращаясь к уравнению (18), перепишем его, как и выше в стационарной задаче, в разделенном виде, введя для удобства обозначения $P^{+}(\tau,\omega,\eta,\mu)=$ $=P(\tau,\omega,+\eta,\mu)$, $P^{-}(\tau,\omega,\eta,\mu)=P(\tau,\omega,-\eta,\mu)$

$$\frac{\partial P^{+}}{\partial\omega}-\eta\frac{\partial P^{+}}{\partial\tau}=-P^{+}(\tau,\omega,\eta,\mu)+\frac{\lambda}{2}\int_{0}^{1}\left[P^{+}(\tau,\omega,\eta',\mu)+P^{-}(\tau,\omega,\eta',\mu)\right]d\eta', \tag{22}$$

$$\frac{\partial P^{-}}{\partial\omega}+\eta\frac{\partial P^{-}}{\partial\tau}=-P^{-}(\tau,\omega,\eta,\mu)+\frac{\lambda}{2}\int_{0}^{1}\left[P^{+}(\tau,\omega,\eta',\mu)+P^{-}(\tau,\omega,\eta',\mu)\right]d\eta'. \tag{23}$$

Складывая и вычитывая друг от друга уравнения (22) и (23), имеем

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\omega}-\eta\frac{\partial\Psi}{\partial\tau}=-\Phi(\tau,\omega,\eta,\mu)+\lambda\int_{0}^{1}\Phi(\tau,\omega,\eta',\mu)d\eta', \tag{24}$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial\omega}-\eta\frac{\partial\Phi}{\partial\tau}=-\Psi(\tau,\omega,\eta,\mu), \tag{25}$$

где $\Phi\equiv P^{+}+P^{-}$, $\Psi\equiv P^{+}-P^{-}$.

Далее, продифференцируем уравнение (24) по ω, а уравнение (25) - по τ, предварительно умножив его на η. Тогда после сложения полученных результатов, находим

$$\eta^{2}\frac{\partial^{2}\Phi}{\partial\tau^{2}}-\frac{\partial^{2}\Phi}{\partial\omega^{2}}=\Phi+2\frac{\partial\Phi}{\partial\omega}-\lambda\int_{0}^{1}\left(\Phi+\frac{\partial\Phi}{\partial\omega}\right)d\eta'. \tag{26}$$

Уравнение (26) можно переписать в виде

$$\eta^{2}\frac{\partial^{2}\Phi}{\partial\tau^{2}}-\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\Phi+\frac{\partial\Phi}{\partial\omega}\right)=\Phi+\frac{\partial\Phi}{\partial\omega}-\lambda\int_{0}^{1}\left(\Phi+\frac{\partial\Phi}{\partial\omega}\right)d\eta'. \tag{27}$$

Если теперь ввести в рассмотрение функцию $\widetilde{\Phi}=e^{\omega}\Phi$ и учесть, что

$$\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial\omega}=e^{\omega}\left(\Phi+\frac{\partial\Phi}{\partial\omega}\right),\quad \frac{\partial^{2}\widetilde{\Phi}}{\partial\omega^{2}}=\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial\omega}+e^{\omega}\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\Phi+\frac{\partial\Phi}{\partial\omega}\right), \tag{28}$$

то после перемножения обеих частей уравнения на временную экспоненту находим

$$\eta^{2}\frac{\partial^{2}\widetilde{\Phi}}{\partial\tau^{2}}-\frac{\partial^{2}\widetilde{\Phi}}{\partial\omega^{2}}=-\lambda\int_{0}^{1}\frac{\partial\widetilde{\Phi}}{\partial\omega}d\eta. \tag{29}$$

Это и есть окончательный вид искомого уравнения, являющегося естественным обобщением уравнения (1) для зависящей от времени задаче переноса излучения, рассмотренной в предыдущем разделе. Как можно было ожидать, теперь мы сталкиваемся с интегро-дифференциальным уравнением в частных производных гиперболического типа, которое, однако, содержит непотенциальный оператор, связанный с появлением в правой части (29) первой производной по времени функции $\widetilde{\Phi}$ [1,4]. Отсюда следует заключить, что при своей общей, зависящей от времени, постановке рассматриваемая нами задача не допускает вариационной формулировки. Тем не менее, в некоторых частных случаях такая формулировка все-таки оказывается возможной.

В качестве примера рассмотрим простейший одномерный аналог нашей задачи в случае консервативного рассеяния. В этом случае соотношения (20) записываются в виде

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \omega} = \frac{\partial \Psi}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial \omega} - \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} + 2\psi = 0. \tag{30}$$

Нас интересует вопрос о существовании законов сохранения, квадратичных относительно функции поля Φ и ее частных производных. Для этого, следуя [22], выразим функцию поля и ее производную по глубине через вспомогательную функцию f посредством следующих соотношений

$$\Phi = e^{-\omega}\left(f + \frac{\partial f}{\partial \omega} \right), \quad \Psi = e^{-\omega} \frac{\partial f}{\partial \tau}. \tag{31}$$

При таком выборе функций Φ и Ψ второе из равенств (30) удовлетворяется тождественно, что же касается первого соотношения, то оно переходит в неоднородное волновое уравнение относительно функции f

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial \omega^2} = -f. \tag{32}$$

Дифференциальный оператор в (32) является потенциальным и поэтому допускает вариационный функционал с Лагранжианом

$$L = f^2 - \left(f'_\tau\right)^2 + \left(f'_\omega\right)^2, \tag{33}$$

и соответствующим ему уравнением Эйлера-Лагранжа

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial L}{\partial f'_\tau} + \frac{d}{d\omega}\frac{\partial L}{\partial f'_\omega} - \frac{\partial L}{\partial f} = 0. \tag{34}$$

Нетрудно проверить, что при выбранном выражении для плотности Лагранжиана уравнение (34) соответствует исходному описательному уравнению задачи (32).

Функции Гамильтона и соответствующие законы сохранения находятся в результате вариации соответствующих функционалов с учетом того, что как Лагранжиан, так и уравнения Эйлера-Лагранжа, не зависят явным образом от оптической толщины τ и времени ω - последние являются циклическими координатами. Другими словами, основные уравнения инвариантны относительно преобразования симметрии в пространстве и во времени. Соответственно нам следует иметь дело с вариацией двух функционалов.

Применим принцип Гамильтона сначала для пространственной координаты

$$\delta \int L\left(f, f'_\tau, f'_\omega\right) d\tau = 0. \tag{35}$$

Опуская в выражении для полной производной L

$$\frac{dL}{d\tau}=\frac{\partial L}{\partial f}f'_\tau+\frac{\partial L}{\partial f'_\tau}f''_{\tau\tau}+\frac{\partial L}{\partial f'_\omega}f''_{\omega\tau}+\frac{\partial L}{\partial\tau} \tag{36}$$

слагаемую, соответствующую частной производной по τ, и подставляя в ней вместо $\partial L/\partial f$ его значение из (34), после ряда несложных выкладок находим

$$H_1=L-\left(\frac{\partial L}{\partial f'_\tau}+\eta\frac{\partial L}{\partial f'_\omega}\right)f'_\tau=\text{const}, \tag{37}$$

или

$$f^2+\left(f'_\tau-f'_\omega\right)=\text{const}. \tag{38}$$

Поступая аналогичным образом для вариации функционала по временной координате

$$\delta\int L\left(f,f'_\tau,f'_\omega\right)d\omega=0, \tag{39}$$

получаем

$$H_2=L-\left(\frac{\partial L}{\partial f'_\tau}+\eta\frac{\partial L}{\partial f'_\omega}\right)f'_\omega=\text{const} \tag{40}$$

или

$$f^2-\left(f'_\tau-f'_\omega\right)^2=\text{const}. \tag{41}$$

Константы в приведенных соотношениях (37)-(38) являются постоянными по оптической глубине, но, разумеется, могут зависеть от ω. Точно так же постоянные в законах сохранения (40), (41) могут зависеть от пространственной координаты. Таким образом оба полученных закона являются интегралами от квадратичных форм, определяющих помимо функции поля также ее частные производные по времени и оптической глубине. Закон сохранения (38) действует для каждого момента времени и физически отражает факт однородности среды и инвариантность задачи относительно преобразования пространственной шкалы координат (gauge transformation). Полученный закон также, как и его стационарный аналог, соответствует закону количества движения в классической механике. В стационарной задаче производная по времени отсутствует и соотношение (38) отражает факт сохранения потока излучения в среде при консервативном рассеянии, что следует уже из первого соотношения (30). В данном случае как f, так и f'_τ являются линейными функциями от оптической глубины. Физически более содержательным можно считать закон сохранения (41), вытекающий из изотропности времени, и в этом смысле является аналогом закона сохранения энергии в механике. Он определяет величину, остающуюся неизменной на каждой оптической глубине с течением времени. Заметим, что полученные соотношения (38) и (41), будучи обобщением полученного в [8] квадратичного соотношения, могут, в свою очередь, послужить отправным пунктом для получения более общих билинейных, двухточечных и прочих соотношений (см., [1,6,7,11]). Задача с граничными условиями для функции f в рассматриваемом частном случае консервативного рассеяния в конечной среде в первом приближении метода дискретных ординат рассмотрена в [22]. Точному решению данной задачи в общей своей постановке будет посвящена одна из последующих работ автора.

4. *Заключение*. В данной работе на примере одной типичной задачи переноса излучения в полубесконечной атмосфере рассмотрен вопрос о возможности вариационной формулировки ее в случае, когда принимается в расчет время, проводимое квантами в процессе многократного рассеяния в среде. От нее зависит существование законов сохранения с квадратичными формами функции поля и ее производных, обобщающих известные законы, полученные для стационарной задачи. Как было показано, при общей постановке задача не допускает лагранжевую фомулировку ввиду непотенциальности появляющегося дифференциального оператора. В то же время такая формулировка становится возможной в частном случае консервативного рассеяния, в результате чего имеют место законы сохранения, отражающие факты однородности среды и изотропности времени.

Бюраканская астрофизическая обсерватория им. В.А.Амбарцумяна, Армения, e-mail: nikoghoss@bao.sci.am

CONSERVATION LAWS IN TIME-DEPENDENT PROBLEMS OF RADIATIVE TRANSFER

A.G.NIKOGHOSSIAN

The classical problem of radiation transfer of the quantum escape from a semi-infinite scattering and absorbing atmosphere considered earlier by the author is generalized to the case when the time spent by quanta on multiple scattering is taken into account. The question about the possibility of variational formulation of the problem and generalization of the quadratic and bilinear conservation laws, obtained in the stationary problem, is raised. It is shown that in its general formulation the problem does not admit the above formulation in view of the non-potentiality of the appearing differential operator, but it appears possible in the particular case of conservative scattering. The obtained two laws of conservation reflect the fact of homogeneity of the medium and isotropy of time.

Keywords: *time-dependent radiative transfer: variational principle: Hamilton's principle: conservation laws*

ЛИТЕРАТУРА

1. *M.M.Vainberg*, Variational Methods for the Study of Non-Linear Operators, Holden Day, San Francisco, 1964.
2. *M.Tavel*, Transport Theory Stat. Phys., **1**, 271, 1971.
3. *E.Tonti*, Acad. R. Belg. (Classes des Sci), **55**, 137, 1969.
4. *R.W.Averton*, *G.M.Homsy*, Stud. Appl. Math., **65**, 31, 1975.
5. *R.W.Preisendorfer*, Hydrologic Optics, vol.4, Honolulu, Havai: US dep. Of Commerce.
6. *P.Bumpi*, *A.Moro*, J. Math. Phys., **23**, 2312, 1982.
7. *A.G.Nikoghossian*, Astrophys. J., **483**, 849, 1997.
8. *R.A.Krikorian*, *A.G.Nikoghossian*, J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer, **56**, 465, 1996.
9. *A.G.Nikoghossian*, J. Quant. Spectrosc. Radiat Transfer, **61**, 345, 1999.
10. *G.B.Rybicki*, Astrophys. J., **213**, 165, 1977.
11. *G.B.Rybicki*, Private communication, 1998.
12. *В.В.Иванов*, Астрон. ж., **55**, 1072, 1978.
13. *В.А.Амбарцумян*, Научные труды, т.1, Изд. АН Арм ССР, Ереван, 1960.
14. *В.А.Амбарцумян*, ДАН СССР, **38**, 257, 1943.
15. *I.Hubeny,* Astron. Astrophys., **185**, 336, 1987.
16. *D.Anderson*, J. Inst. Math. Applic., **12**, 55, 1973.
17. *И.М.Гельфанд*, *С.В.Фомин*, Вариационное исчисление, М., Госиздат. Физ.-мат. Лит., 1961.
18. *Дж.У.Лич*, Классическая механика, М., Изд. Иностр. Лит., 1961.
19. *А.Г.Никогосян,* Астрофизика, **38**, 577, 1995, (Astrophysics, **38**, 319, 1995).
20. *В.В.Соболев*, Перенос излучения в атмосферах звезд и планет, М., Гостехиздат, 1956.
21. *С.Чандрасекар*, Перенос лучистой энергии, М., Изд. Иностр. Лит., 1953.
22. *A.D.Code*, Astrophys. J., **159**, 1029, 1970.
23. *А.Г.Никогосян*, Астрофизика, **64**, 537, 2021, (Astrophysics, **64**, 490, 2021).