ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Տեխնիկական գիտություններ, սերիա XXXVII, № 6, 1984 Серия технических наук

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

В. А. АРЗУМАНЯН

ОБ ИЗГИБЕ КРУГЛОЙ, ЗАЩЕМЛЕННОЙ ПО КОНТУРУ ПЛАСТИНКИ ЗА ПРЕДЕЛОМ УПРУГОСТИ

Рассмотрим задачу об изгибе круглой, защемленной по контуру пластинки при действии на нее осесимметрической равномерно-распределенной нагрузки. Основное уравнение, описывающее упруго-пластическое равновесие в рамках деформационной теории пластичности, имеет вид [1]:

$$\frac{d^4w}{dr^4}+\frac{2}{r}\frac{d^3w}{dr^3}-\frac{1}{r^2}\frac{d^2w}{dr^2}+\frac{1}{r^3}\frac{dw}{dr}=$$

$$=\frac{q}{D}-\frac{1}{D}\left(\frac{d^2\Delta M_r}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d\Delta M_r}{dr}-\frac{1}{r}\frac{d\Delta M_\theta}{dr}\right), \qquad (1)$$

где ΔM_r и ΔM_θ — нелинейные компоненты изгибающих моментов, определяемые по формулам, приведенным [1].

В первом приближении предполагаем, что в пластинке возникают две упруго-пластические зоны и вдоль этих зон $\Delta M_r(r)$ и $\Delta M_\theta(r)$ меняются по закону треугольника [2] (рис. *а*).

Из граничных условий защемленной по контуру пластинки имеет место соотношение [1]

$$\varkappa_\theta(R)=\varkappa_r(0)-\frac{qR^2}{16D}-\frac{1}{R}\frac{dY}{dr}(R)=0, \qquad (2)$$

где $Y(r)$ — частное решение основного нелинейного уравнения (1).

В данной работе это решение получено в виде:

$$Y(r)=\frac{R^2}{4D}\left\{\Delta M_r(0)\left(x^2-\frac{5}{9}x_1^2-\frac{2}{3}x_1^2\ln\frac{x}{x_1}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{\Delta M_r(R)(x-x_2)}{1-x_2}\left[\frac{1}{3}(2x^2-xx_2-x_2^2)-\frac{1}{2}x_2(x+x_2)\ln\frac{x}{x_2}\right]\right\}. \qquad (3)$$

здесь $x=\frac{r}{R}$, $x_1=\frac{r_1}{R}$, $x_2=\frac{r_2}{R}$ — безразмерные координаты вдоль радиального направления пластинки, а r_1 и r_2 — длины левой и правой упруго-пластических зон (рис. *а*).

Для решения задачи при заданном значении параметра нагрузки надо определить расчетные параметры: кривизны в центре и на контуре пластинки; положение упруго-пластических зон. Для их определения получены нелинейные уравнения [1]:

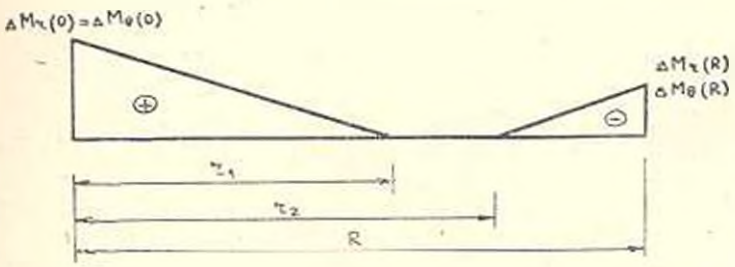
$$x_1^2 = \frac{6}{13}\,\frac{t}{\varkappa_r(0) - \dfrac{1}{R}\dfrac{dY}{dr}(R)}; \tag{4}$$

$$\varkappa_r(R) = -2\varkappa_r(0) + \frac{3}{R}\frac{dY}{dr}(R) - \frac{d^2Y}{dr^2}(R), \tag{5}$$

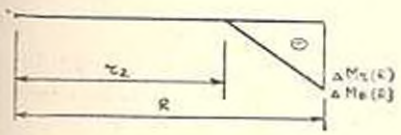
где

$$t = \left[\varkappa_r(0) - \frac{19}{36}\frac{\Delta M_r(0)}{D}\right] \times$$

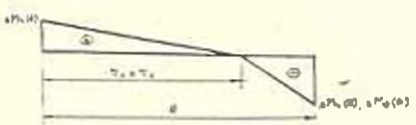
$$\times \left\{1 - \frac{1}{2\sqrt{3}}\,\frac{\sqrt{13\dfrac{\varepsilon_T^2}{h^2} - \left|\varkappa_r(0) - \dfrac{1}{6}\dfrac{\Delta M_r(0)}{D}\right|^2}}{\varkappa_r(0) - \dfrac{19}{36}\dfrac{\Delta M_r(0)}{D}}\right\}. \tag{6}$$



а



б



в

Рис.

Для пластинки, материал которой является идеально-пластическим, уравнения (4) и (5) приводятся к виду:

$$\Delta m_r(R) = \frac{2}{9}\,\frac{\dfrac{t_0}{\alpha_1^2} - e(0) + \dfrac{9}{2}\Delta m_r(0)\left(1 - \dfrac{1}{3}\alpha_1^2\right)}{1 - \dfrac{\alpha_2(1+\alpha_2)}{4} + \dfrac{1}{2}\,\dfrac{\alpha_2}{1-\alpha_2}\ln\alpha_2}; \tag{7}$$

$$e(R)=\frac{1}{\sqrt{3}}\left\{2e(0)-9\Delta m_r(0)\left(1-\frac{2}{3}\alpha_1^2\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{9}{2}\Delta m_r(R)\left[1-\alpha_2(1+\alpha_2)+\frac{\alpha_2}{1-\alpha_2}\ln\alpha_2\right]\right\}, \qquad (8)$$

где обозначено

$$t_0=\frac{6}{13}\left[e(0)-\frac{19}{4}\Delta m_r(0)\right]\times$$

$$\times\left|1-\frac{1}{2\sqrt{3}}\,\frac{\sqrt{13-\left|e(0)-\frac{3}{2}\Delta m_r(0)\right|^2}}{e(0)-\frac{19}{4}\Delta m_r(0)}\right|; \qquad (9)$$

$$\Delta m_r(0)=\frac{\Delta M_r(0)\cdot h}{9D\varepsilon_1}; \qquad \Delta m_r(R)=\frac{\Delta M_r(R)\,h}{9D\varepsilon_1}; \qquad (10)$$

$$e(r)=\frac{\varepsilon_0(r)}{\varepsilon_T}; \qquad \alpha_2=\frac{\alpha_1}{\mu}; \qquad \varkappa_r(0)=e(0)\frac{\varepsilon_1}{h};$$

$$\varkappa_r(R)=-\sqrt{3}\,e(R)\frac{\varepsilon_1}{h}. \qquad (11)$$

Параметр нагрузки определяется из соотношения

$$\frac{9}{16}p=e(0)-\frac{9}{2}\left\{\Delta m_r(0)\left(1-\frac{1}{3}\alpha_1^2\right)-\Delta m_r(R)\times\right.$$

$$\left.\times\left[1-\frac{\alpha_2(1+\alpha_2)}{4}+\frac{1}{2}\,\frac{\alpha_2}{1-\alpha_2}\ln\alpha_2\right]\right\}, \qquad (12)$$

где

$$p=\frac{qR^3}{Eh^2\varepsilon_1}. \qquad (13)$$

Рассмотрим два частных случая. 1. Интенсивность деформаций в крайних волокнах центрального сечения пластинки равна деформации текучести (рис. б). В этом случае

$$\varepsilon_0(0)=\varepsilon_T, \qquad e(0)=\frac{\varepsilon_0(0)}{\varepsilon_T}=1, \qquad \Delta m_r(0)=0, \qquad \alpha_1=0,$$

поэтому из (7) и (8) получаем:

$$\Delta m_r(R)=\frac{2}{9}\,\frac{\frac{12}{12\alpha_2^2}-1}{1-\frac{\alpha_2(1+\alpha_2)}{4}+\frac{1}{2}\,\frac{\alpha_2}{1-\alpha_2}\ln\alpha_2}; \qquad (14)$$

$$e(R) = \frac{2}{\sqrt{3}}\left\{1 + \frac{9}{4}\Delta m_r(R)\left[1 - \alpha_2(1+\alpha_2) + \frac{\alpha_2^2}{1-\alpha_2}\ln\alpha_2\right]\right\}. \quad (15)$$

при этом

$$\Delta m_r(R) = -\frac{\sqrt{3}}{9}\left[e(R) + \frac{1}{2e_0(R)} - \frac{3}{2}\right]. \quad (16)$$

2. Упруго-пластические зоны примыкают друг к другу (рис. в).

В этом случае $\alpha_1 = \alpha_2$ и в центральном сечении пластинки значение интенсивности деформаций получается равным $e(0) = 4{,}316$. Выражение под радикалом в (9) обращается в нуль и параметр t_0 принимает значение, равное 0,953. Основная нелинейная система алгебраических уравнений (7) и (8) записывается в виде:

$$\Delta m_r(R) = -\frac{2}{3}\,\frac{\dfrac{0{,}953}{\alpha_1^2} - 2{,}184 - 0{,}711\alpha_1^2}{1 - \dfrac{\alpha_1(1+\alpha_1)}{4} + \dfrac{1}{2}\,\dfrac{\alpha_1^2}{1-\alpha_1}\ln\alpha_1}; \quad (17)$$

$$e(R) = 2{,}521 + 1{,}642\alpha_1^2 + 2{,}598\Delta m_r(R)\left[1 - \alpha_1(1+\alpha_1) + \frac{\alpha_1^2}{1+\alpha_1}\ln\alpha_1\right]. \quad (18)$$

На основании этой системы определяются величины α_1 и $e(R)$ с учетом выражения (16).

Рассмотрим предельный случай для защемленной пластинки. Этому случаю соответствует система нелинейных алгебраических уравнений (17) и (18). Она записана относительно двух неизвестных α_1, $e(R)$, решена методом подбора корней и найдены следующие значения:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0{,}772; \qquad e(R) = 6{,}79; \qquad \Delta m_r(R) = 1{,}02;$$
$$e(0) = 4{,}316; \qquad \Delta m_r(0) = 0{,}474. \quad (19)$$

Параметр нагрузки, вычисленный на основании (13), равен

$$p = \frac{qR^2}{Eh^2\varepsilon_T} = 2{,}839. \quad (20)$$

Известно [3], что точное значение параметра нагрузки, отвечающее предельному состоянию защемленной по контуру пластинки, равно $P_{пр} = 3$.

Значение (20) относится к решению задачи в первом приближении, когда упруго-пластические зоны меняются по закону треугольника. При решении задачи во втором приближении функция Δm_r получается на каждом участке в виде нескольких треугольников, полученных на основе решения задачи в первом приближении. Влияние каждого из этих треугольников на решение задачи строго определяется теми же соотношениями, которые были использованы при решении задачи

в первом приближении, когда имелись только два треугольника. Результаты расчета пластинки, относящиеся к ее различным состояниям, в зависимости от параметра нагрузки приведены в таблице.

Таблица

$p = \frac{qR^2}{\sigma_T h^2}$	$\frac{w(0)h}{R^2\varepsilon_T}$	$\frac{\varkappa_r(0)h}{\varepsilon_T}$	$\frac{\varkappa_r(R)h}{\varepsilon_T}$	$\frac{\varepsilon_\theta(0)}{\varepsilon_T}$	$\frac{\varepsilon_\theta(R)}{\varepsilon_T}$	$\frac{M_r(0)}{\sigma_T h^2}$	$\frac{M_r(R)}{\sigma_T h^2}$
1,54	0,217	0,866	−1,733	0,866	1	0,144	−0,198
1,775	0,25	1	−2,075	1	1,198	0,167	−0,221
2,448	0,474	2	−6,656	2	3,843	0,229	−0,282
2,667	0,702	3	−11,915	3	6,873	0,24	−0,286
2,895	0,962	4,316	−19,759	3,316	11,408	0,246	−0,288

Как показывают полученные результаты, за предельный уровень нагрузки, при котором пластинка еще способна сопротивляться нагружению, можно принять значение $p = 2{,}896$. Дальнейшее увеличение нагрузки влечет за собой резкое увеличение прогибов и деформаций, которые будут неограниченно возрастать при приближении уровня нагрузки к ее предельному значению.

ЕрПИ им. К. Маркса

8. VII. 1984

Վ. Ա. ԱՐԶՈՒՄԱՆՅԱՆ

ԽԶՐԱԳԾՈՎ ԱՄՐԱԿՑՎԱԾ ԿԼՈՐ ՍԱԼԻ ԾՌՈՒՄԸ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՍԱՀՄԱՆՆԵՐԻՑ ԴՈՒՐՍ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Դիտարկվում է եզրագծով ամրակցված կլոր սալի առաձգական-պլաստիկ հավասարակշռությունը առաձգականության սահմաններից դուրս։ Կիրառված է հաջորդական մոտավորությունների մեթոդը, որի առաջին մոտավորության համար ընդունված է, որ ծռող մոմենտների ու գծային բաղադրիչները փոխվում են եռանկյան օրենքով։ Կատարված է թվային հաշվարկ և ստացված են սահմանային բեռի, ծռող մոմենտների, ճկվածքների և կորությունների արժեքները՝ կախված բեռնվածքից։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арзуманян В. А.* Упруго-пластическое равновесие круглой пластинки.— В кн.: Межвуз. тем. сб. научн. тр.: Исследования по сейсмостойкости сооружений. Ереван. Изд-во ЕрПИ, 1984, с. 56—64.
2. *Цурков С. И.* Напряженно-деформированное состояние в тонком цилиндре от воздействия краевого момента за пределом упругости.— Москва, 1981.— 16 с.— Рукопись представлена МИСИ им. В. В. Куйбышева. Деп. в ВНИИИС, 1981.
3. *Ржаницын А. Р.* Предельное равновесие пластин и оболочек.— М.: Наука, 1983.— 288 с.