

МАШИНОСТРОЕНИЕ

Г. Л. АРТЕМЯН, Г. О. САРГСЯН, К. И. КАРАХАНЫАН

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ СТУПЕНЧАТЫХ ВАЛОВ ПРИ КРУЧЕНИИ

Рассматривается задача кручения ступенчатого вала под действием вращающего момента M по середине и моментов M_1 и M_2 на концах вала (рис. 1а). Кручение произвольного тела вращения в виде ступенчатого вала произвольной осесимметричной, боковой и торцевой нагрузками изучено в [1]. Решение этой задачи сведено к бесконечным системам линейных уравнений и поэтому его практическое использование для многоступенчатых валов становится затруднительным из-за математической сложности построения конечных решений. Ниже предлагается упрощенный приближенный метод расчета напряженного состояния ступенчатых валов, который применен для расчета валов электродвигателей малой мощности на стадии их проектирования.

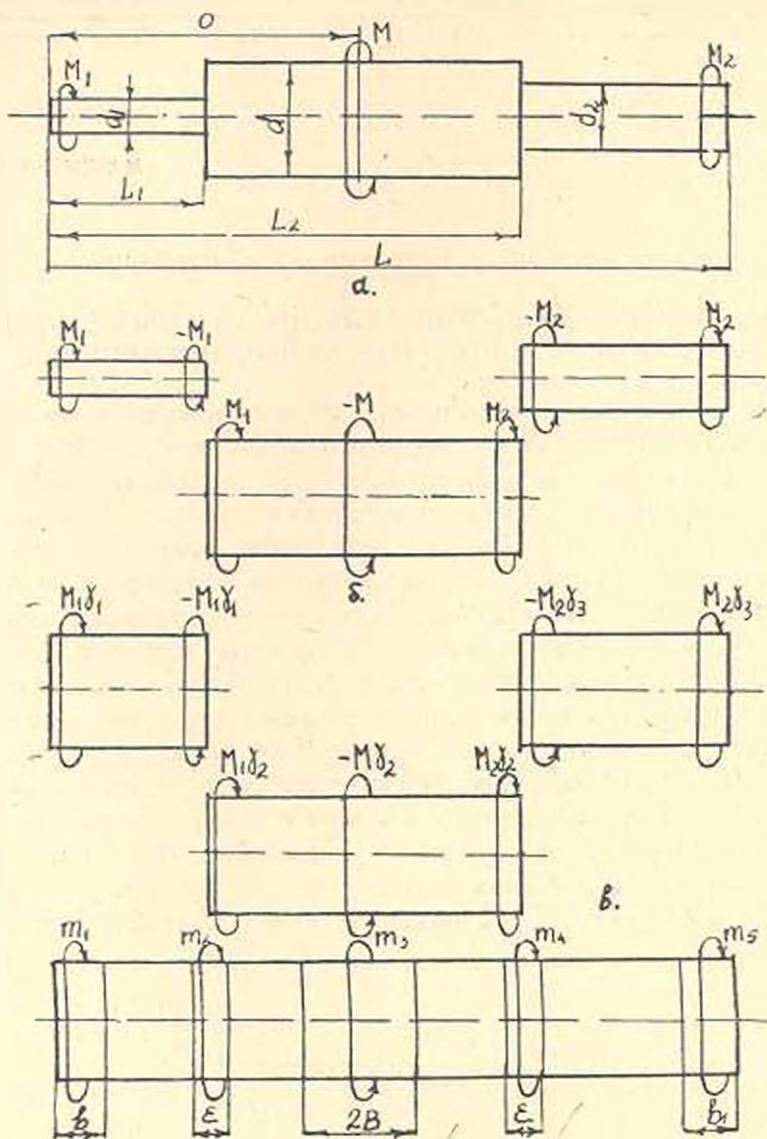
По аналогии с задачами изгиба ступенчатых балок применен метод приведения ступенчатого вала к валу с единой жесткостью с дальнейшим интегрированием уравнений равновесия. При замене ступенчатого вала валом с единой приведенной жесткостью на кручение (рис. 1б) коэффициентами приведения для отдельных участков являются:

$$\gamma_1 = \left(\frac{d}{d_1}\right)^4; \quad \gamma_2 = 1; \quad \gamma_3 = \left(\frac{d}{d_2}\right)^4.$$

Действующие на приведенный вал моменты определяются формулами:

$$\begin{aligned} m_1 &= M_1 \gamma_1 = M_1 \left(\frac{d}{d_1}\right)^4; \\ m_2 &= M_1 (1 - \gamma_1) = M_1 \left[1 - \left(\frac{d}{d_1}\right)^4\right]; \\ m_3 &= -M \gamma_2 = -M; \\ m_4 &= M_2 (1 - \gamma_3) = M_2 \left[1 - \left(\frac{d}{d_2}\right)^4\right]; \\ m_5 &= M_2 \gamma_3 = M_2 \left(\frac{d}{d_2}\right)^4. \end{aligned} \tag{1}$$

Предполагается, что моменты m_1, m_2 и m_3, m_4, m_5 действуют, соответственно, на участках шириной $b, 2\varepsilon, 2B, 2\varepsilon, b_1$.



2.

Рис. 1.

Располагая цилиндрическую систему координат на левом торце вала и направляя z по оси вала, для функции распределения касательных напряжений τ_{rz} получим:

$$r_{22}(Rz) = f(z) = \begin{cases} \frac{m_1}{2\pi R^2 b}, & 0 < z < b; \\ \frac{m_2}{4\pi R^2 \varepsilon}, & L_1 - \varepsilon < z < L_1 + \varepsilon; \\ \frac{m_3}{4\pi R^2 B}, & a - B < z < a + B; \\ \frac{m_4}{4\pi R^2 \varepsilon}, & L_2 - \varepsilon < z < L_2 + \varepsilon; \\ \frac{m_5}{2\pi R^2 b}, & L - b_1 < z < L; \\ 0, & b < z < L_1 - \varepsilon, \\ & L + \varepsilon < z < a - B, \\ & a + B < z < L_2 - \varepsilon, \\ & L_2 + \varepsilon < z < L - b_1. \end{cases} \quad (2)$$

где $R = \frac{d}{2}$.

Кусочно-непрерывная функция $f(z)$ на интервале $0 < z < L$ разлагается в ряд Фурье

$$f(z) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{k\pi z}{L},$$

где

$$a_0 = \frac{2}{L} \int_0^L f(z) dz; \quad a_k = \frac{2}{L} \int_0^L f(z) \cos \frac{k\pi z}{L} dz. \quad (3)$$

Подстановка значения $f(z)$ из (2) в (3) и предельный переход при $\varepsilon \rightarrow 0$ приводит к следующим формулам для определения коэффициентов разложения:

$$a_0 = 0; \quad a_k = \frac{Q_k}{k\pi^2 R^2},$$

где

$$Q_k = M_1 \left[\frac{k\pi}{L} \cos \frac{k\pi L_1}{L} + \left(\frac{d}{d_1} \right)^4 \left(\sin \frac{k\pi b}{L} - \frac{k\pi}{L} \cos \frac{k\pi L_1}{L} \right) \right] + \\ + \frac{M}{B} \cos \frac{k\pi a}{L} \sin \frac{k\pi B}{L} + M_2 \left[\frac{k\pi}{L} \cos \frac{k\pi L_2}{L} - \right. \\ \left. - \left(\frac{d}{d_2} \right)^4 \left(\frac{k\pi}{L} \cos \frac{k\pi L_2}{L} - \frac{(-1)^k}{b_1} \sin \frac{k\pi b_1}{L} \right) \right]. \quad (4)$$

В цилиндрических координатах (r, φ, z) функция напряжения $\Phi(r, z)$ в области осевого сечения вала удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \frac{3}{r} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0, \quad (5)$$

а на контуре осевого сечения — граничному условию:

$$\Phi [r(s); z(s)] = - \int_0^s T_n(s) \cdot r^2(s) ds,$$

где

$$T_n(s) = \tau_{\varphi r} \frac{dz}{ds} + \tau_{\varphi z} \frac{dr}{ds} = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial s} \quad (6)$$

— проекция полного напряжения на нормаль к контуру осевого сечения на расстоянии s по длине образующей вала: $r(s)$ — радиус вала в сечении s ;

$$\tau_{\varphi r} = - \frac{1}{r^2} r \frac{\partial \Phi}{\partial z}; \quad \tau_{\varphi z} = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial r}. \quad (7)$$

Так как вал скручивается нагрузкой симметричной оси, то на оси вала напряжения $\tau_{\varphi r}$ и $\tau_{\varphi z}$ равны нулю, т. е. $\Phi(0, z) = \text{const}$, что без ограничения общности приводит к условию

$$\Phi(0, z) = 0. \quad (8)$$

Торцы вала $z = 0$ и $z = L$ свободны от напряжений, что при учете (6) означает

$$\Phi(r; 0) = \Phi(r; L) = 0. \quad (9)$$

Решение уравнения (5) получается в виде

$$\Phi(r; z) = r^2 \sum_{k=1}^{\infty} A_k I_2 \left(\frac{k\pi r}{L} \right) \sin \frac{k\pi z}{L}, \quad (10)$$

где $I_2 \left(\frac{k\pi r}{L} \right)$ — функция Бесселя первого рода от мнимого аргумента.

Тогда условия (8) и (9) удовлетворяются автоматически, и для напряжений $\tau_{\varphi r}$ из (10) и (7) получается

$$\tau_{\varphi r} = - \frac{\pi}{L} \sum_{k=1}^{\infty} k A_k I_2 \left(\frac{k\pi r}{L} \right) \cos \frac{k\pi z}{L},$$

где

$$A_k = \frac{L Q_k}{k\pi^3 R^2 I_2 \left(\frac{k\pi R}{L} \right)}. \quad (11)$$

Функция напряжений и касательные напряжения определяются формулами:

$$\Phi(r; z) = \frac{Lr^2}{\pi^3 R^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Q_k}{k} \frac{I_1\left(\frac{k\pi r}{L}\right)}{I_2\left(\frac{k\pi R}{L}\right)} \sin \frac{k\pi z}{L};$$

$$\tau_{\varphi r} = \frac{1}{\pi^2 R^2} \sum_{k=1}^{\infty} Q_k \frac{I_2\left(\frac{k\pi r}{L}\right)}{I_2\left(\frac{k\pi R}{L}\right)} \cos \frac{k\pi z}{L}; \quad (12)$$

$$\tau_{\varphi z} = -\frac{1}{\pi^3 R^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Q_k}{k} \left[2 \frac{I_2\left(\frac{k\pi r}{L}\right)}{I_2\left(\frac{k\pi R}{L}\right)} + \frac{k\pi}{L} \frac{I_2\left(\frac{k\pi r}{L}\right)}{I_2\left(\frac{k\pi R}{L}\right)} \right] \sin \frac{k\pi z}{L}.$$

Для оценки точности предложенного аналитического метода были выполнены расчеты напряжений в различных сечениях вала, представленного на рис. 2. Эти значения сравнены с результатами расчетов, приведенными в [2]. Как и было принято в [2], в качестве сравниваемых значений напряжений взяты отношения действующих на данном участке напряжений к напряжениям $T_1 = \frac{M}{4\pi r_0^2}$ на участке $0 < z < \frac{r_0}{2}$ (табл.).

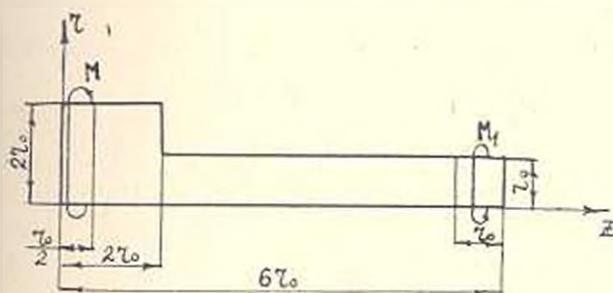


Рис. 2.

Таблица

$\frac{r}{r_0}$	$\frac{\tau_{\varphi z}}{T_1}$	$\frac{\tau_{\varphi r}}{T_4}$	$\frac{\tau_{\varphi z}}{T_1}$	$\frac{\tau_{\varphi r}}{T_1}$	Сравнение результатов в %	
	по формулам (12)		по [2]		$\frac{\tau_{\varphi z}}{T_1}$	$\frac{\tau_{\varphi r}}{T_1}$
0	0	0	0	0	0	0
0,25	0,295	-0,031	0,256	-0,027	15,2	13,8
0,5	0,51	-0,125	0,471	-0,112	8,3	11,6
1	0,652	-0,31	0,62	-0,275	5,2	12,7

Анализ результатов показывает, что предложенный метод по сравнению с точным приводит к несколько завышенным значениям напря-

жений, что можно отнести к запасу прочности конструкции. Приведенные результаты свидетельствуют о практической применимости метода приведения ступенчатого вала к валу с единой приведенной жесткостью при решении задач кручения.

НИИ электромаш

15. II. 1982

Հ. Լ. ԱՐՏԵՄՅԱՆ, Չ. Չ. ՍԱՐԳՍՅԱՆ, Կ. Ի. ԿԱՐԱՆԱՆՅԱՆ

ԱՍՏԻՃԱՆԱՎՈՐ ԼԻՍԵՌՆԵՐԻ ԼԱՐՎԱԾԱՅԻՆ ՎԻՃԱԿԻ ՎԵՐԼՈՒԾԱԿԱՆ ՈՐՈՇՈՄՎԵ ՈՂՈՐՄԱՆ ԴԵՊՔՐՈՒՄ

Ա. մ. փ. ո. փ. ո. մ.

Քննարկվում է աստիճանավոր լիսեռի ոլորման խնդիրը լիսեռի միջին մասում և նրա ծայրերում ազդող մոմենտների ազդեցության տակ: Կիրառված է աստիճանավոր լիսեռի միասնական կոշտությամբ լիսեռով ներկայացման եղանակը՝ հավասարակշռության հավասարումների հետադա ինտեգրմամբ:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Абрамян Б. Л., Джрбашян М. М. О кручения валов переменного сечения. — ПИММ, 1951, XV, 64, с. 451—472.
2. Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. Л. Кручение упругих тел. — М.: Физматгиз, 1969. — 688 с.