ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Տեխնիկական գիտութ. սերիա XXXVII, № 5, 1984 Серия технических наук

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА

К. П. МАНУКЯН, Э. И. МАНУКЯН

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНО-СТАТИСТИЧЕСКИЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ СЛОЖНЫХ ОБЪЕКТОВ

Процесс изготовления интегральных схем (ИС) связан с технологическими разбросами большого количества электрофизических и геометрических параметров. При массовом производстве интегральных схем особую роль представляют исследования чувствительности выходных характеристик к указанным разбросам. Наличие функции чувствительности (ФЧ) позволяет диагностировать состояние внутренних, недоступных для контроля параметров ИС, оптимально управлять технологическим процессом производства ИС.

Большинство известных методов определения ФЧ предполагают наличие математической модели, принципиальной или структурной схемы объекта исследования [1]. Однако сложность современных ИС и технологического процесса его изготовления не позволяют получать точные математические описания ИС. В такой ситуации, учитывая большую серийность изготовления ИС, для определения ФЧ можно воспользоваться статистическими данными о результатах измерений контролируемых ИС.

Пусть ИС характеризуется вектором $X = (x_1, x_2, \dots, x_m)^T$ внутренних параметров состояния и вектором $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$ выходных переменных. Тогда можно написать:

$$\Delta y_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}(X, Y) \cdot \Delta x_j, \qquad i = \overline{1{-}n}, \tag{1}$$

где $a_{ij}(\cdot)$ — функция чувствительности y_i от x_j; Δy_i и Δx_j — приращения y_i и x_j.

Тогда в первом приближении можно принять следующую модель для ИС исследуемой серии:

$$Y - M(Y) = A(X - M(X)) + E_0, \tag{2}$$

где E_0 — вектор случайных ошибок измерения Y с элементами e_{0i}; A — матрица размерности $n \times m$ с элементами a_{ij}; $M(\cdot)$ — оператор математического ожидания.

Дифференцируя (2) по элементам вектора X, получим:

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_j} = a_{ij},$$

а с учетом (1) —

$$a_{ij} = a_{ij}[M(X);\ M(Y)].$$

Методы определения матрицы A по статистическим данным измерения Y и X освещены в [2]. Однако при анализе ИС применение этих методов связано с большими трудностями, ввиду невозможности или трудности измерения параметров X. В данной работе предлагается метод определения a_{ij} при отсутствии статистических данных измерений величин X.

Пусть для совокупности исследуемых ИС параметры X имеют случайный разброс. Задана дисперсионная матрица случайных величин X, результаты измерений вектора Y и средне-квадратичная ошибка их измерений σ_i $(i = \overline{1 \cdot n})$. Требуется получить оценки a_{ij}.

Введем в рассмотрение нормированные переменные:

$$z_i = \frac{y_i - M(y_i)}{S_i}; \qquad з_{ij} = \frac{a_{ij}}{S_i}; \qquad e_i = \frac{e_{0i}}{S_i},$$

где S_i^2 — выборочня дисперсия переменных y_i.

Введем в рассмотрение векторы Z, E и матрицу B_0, элементами которых являются z_i, $з_{ij}$, e_i, соответственно. Тогда выражение (2) можно представить в виде:

$$Z = B_0(X - M(X)) + E. \tag{3}$$

Определим дисперсионную матрицу линейного преобразования (3):

$$D(Z) = B_0 D(X) B_0^T + D, \tag{4}$$

где D — диагональная матрица с элементами $\frac{\sigma_i^2}{S_i^2}$.

Используя ортогональное преобразование симметричной матрицы $D(X)$, из (4) получим:

$$D(Z) = B_0 U \lambda \lambda^T U^T B_0^T + D, \tag{5}$$

где U — матрица, столбцами которой являются собственные векторы матрицы $D(X)$; λ — диагональная матрица с элементами $\sqrt{\lambda_i}$; λ_i — i-ое собственное число матрицы $D(X)$.

Приняв обозначения $R = D(Z) - D$ и $B = B_0 U \lambda$, из (5) следует, что

$$R = B \cdot B^T. \tag{6}$$

Используя результаты измерения выходных переменных, можно определить элементы матрицы R. Тогда (6) можно рассматривать как систему уравнений относительно элементов матрицы B. Но однозначное решение уравнений (6) возможно лишь при соблюдении условия:

$$m \leqslant \frac{n+1}{2}. \qquad (7)$$

Однако это условие на практике резко соблюдается. Ниже предлагается итерационный алгоритм для получения оценок элементов B.

Умножив уравнение (6) на матрицу $B(B^T B)^{-1}$, получим:

$$B = R \cdot B(B^T \cdot B)^{-1}.$$

Используя последнее выражение, можно организовать итерационный процесс определения оценок элементов матрицы B по схеме

$$B_{k+1} = R \cdot B_k (B_k^T \cdot B_k)^{-1}, \qquad (8)$$

где k—номер итерации.

Численные эксперименты показывают, что итерационный процесс (8) не всегда сходится и это можно обеспечить, используя метод релаксации. Итерационную формулу определения B при использовании этого метода можно получить на основе (8):

$$B_{k+1} = B_k + Q(B'_{k+1} - B_k) = B_k + Q[R \cdot B_k (B_k^T \cdot B_k)^{-1} - B_k], \qquad (9)$$

где Q—матрица коэффициентов релаксации, вариацией значений которых достигается сходимость процесса (9).

Исследуем теперь сходимость процесса (9). Введем в рассмотрение остаточную дисперсионную матрицу

$$S_k = R - B_k \cdot B_k^T. \qquad (10)$$

Тогда необходимое условие сходимости процесса (9) можно представить в виде:

$$\|S_{k+1}\| < \|S_k\|, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots, \qquad (11)$$

где $\|S_k\|$ = некоторая каноническая форма матрицы S_k.

Определим значение коэффициента релаксации Q, входящего в (9), обеспечивающее соблюдение условия (10). Для этого из (9) и (10) получим выражение для S_{k+1}:

$$S_{k+1} = R - B_k B_k^T + Q(2B_k B_k^T - B_k B'^T_{k+1} - B'_{k+1} B_k^T) +$$

$$+ Q^2 (B'_{k+1} B_k^T + B_k B'^T_{k+1} - B_k B_k^T - B'_{k+1} B'_{k+1}), \qquad (12)$$

где

$$B'_{k+1} = R \cdot B_k (B_k^T \cdot B_k)^{-1}.$$

После простых преобразований имеем:

$$R = B'_{k+1} B_k^T \quad \text{и} \quad R = B_k B'^T_{k+1}.$$

Подставив последние два выражения в (12), получим:

$$S_{k+1} = R - B_k B_k^T - 2Q(R - B_k B_k^T) + Q^2(R - B_k B_k^T) +$$

$$+ Q^2(R - B_{k+1} \cdot B'^T_{k+1}). \qquad (13)$$

Преобразуем последнее слагаемое выражения (13), подставив в нем значение B'_{k+1}:

$$R - B_{k+1} B'^T_{k+1} = R - RB_k (B_k^T \cdot B_k)^{-1} \cdot (B_k^T \cdot B_k)^{-1} \cdot B_k^T \cdot R =$$

$$= R - R(B_k B_k^T)^{-1} \cdot R = -(R - B_k B_k^T)(B_k \cdot B_k^T)^{-1} \cdot R.$$

С учетом полученного, выражение (13) приведем к виду

$$S_{k+1} = (R - B_k B_k^T)\,[E - 2QE + Q^2 E - Q^2 (B_k \cdot B_k^T)^{-1} \cdot R]. \qquad (14)$$

Используя свойства канонических норм [3], из (14) получим:

$$\| S_{k+1} \| \leqslant \| S_k \| \cdot [Q^2 \| (B_k \cdot B_k^T)^{-1} R \| + |1 - 2Q + Q^2|]. \qquad (15)$$

Сравнивая (15) с (11), необходимое условие сходимости процесса (9) получим в виде:

$$Q^2 \alpha + |1 - 2Q + Q^2| < 1, \qquad (16)$$

где

$$\alpha = \| (B_k B_k^T)^{-1} \cdot R \|.$$

После простых преобразований из (16) получим необходимое условие сходимости итерационного процесса (9) в виде

$$0 < (1 + \alpha) Q < 2.$$

Анализ выражения (16) показывает, что значение Q, обеспечивающее максимальное значение отношения $\| S_k \| / \| S_{k+1} \|$ в (15), определяется по формуле $Q = (1 + \alpha)^{-1}$. Подставив это значение в (9), получим наиболее быстро сходящийся итерационный процесс:

$$B_{k+1} = B_k + (1 + \| (B_k \cdot B_k^T)^{-1} R \|)^{-1} [R \cdot B_k (B_k \cdot B_k^T)^{-1} - B_k].$$

С целью исследования решений, полученных по вышеописанной методике, составим вектор-столбец F с элементами

$$f_i = \sum_{j=1}^{n} (r_{ij} - r'_{ij})^2,$$

где b_{ij}, r_{ij}, r'_{ij} — элементы матрицы: B, R и $B_{k+1}^T \cdot B_k$, т. е.

$$r'_{ij} = \sum_{p=1}^{m} (b_k)_{jp} (b_{k+1})_{ip}.$$

Определим значения $(b_{k+1})_{ip}$, минимизирующих элементы вектора F. Искомые значения $(b_{k+1})_{ip}$ определим из уравнений:

$$\frac{\partial f_i}{\partial (b_{k+1})_{ip}} = 0, \qquad \begin{cases} p = \overline{1\cdot m}, \\ i = \overline{1\cdot n}. \end{cases} \tag{17}$$

Легко показать, что систему уравнений (17) можно написать в виде: $B_{k+1}\cdot B_k^T\cdot B_k = R\cdot B_k$, что эквивалентно уравнению (8).

При $k\to\infty$ имеем $B_k\approx B_{k-1}$, т. е. полученные с помощью процессов (8) и (9) значения элементов матрицы B_{k-1} обеспечивают минимум среднеквадратичных отклонений элементов матрицы $(R-B\cdot B^T)$ от нуля в уравнении чувствительности (6).

Программные средства, реализующие данный метод, могут быть включены в состав математического обеспечения автоматизированных систем управления качеством производства ИС, где обеспечивается автоматическое измерение параметров ИС, сбор, хранение и обобщение результатов измерений.

ЕрПИ им. К. Маркса

20. IX. 1982.

Կ. Գ. ՄԱՆՈՒԿՅԱՆ, Է. Ն. ՄԱՆՈՒԿՅԱՆ

ԲԱՐԴ ՕԲՅԵԿՏՆԵՐԻ ԶԳԱՅՆՈՒԹՅԱՆ ՈՒՍՈՒՄՆԱՍԻՐՄԱՆ ՓՈՐՁՆԱՎԻՃԱԿԱԳՐԱԿԱՆ ՄԵԹՈԴ

Ամփոփում

Հոդվածում առաջարկվում է բարդ օբյեկտների ներքին պարամետրերից ելքային մեծությունների զգայնության որոշման եղանակ։ Քննարկվում է այն դեպքը, երբ անհայտ է ուսումնասիրվող օբյեկտի մաթեմատիկական նկարագիրը, ներքին պարամետրերը անմատչելի են փոփոխումների և չափումների համար, սակայն հայտնի են ուսումնասիրվող օբյեկտների բազմության համար ելքային մեծությունների չափման տվյալները։

Առաջարկվում է զգայնության գործակիցների որոշման իտերացիայի ալգորիթմը և որոշվում է նրա զուգամիտման տիրույթը։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Розенвассер Е. Н., Юсупов Р. М.* Чувствительность систем автоматического управления.—Л.: Энергия, 1969.—208 с.
2. *Кендалл М. Дж., Стьюарт А.* Многомерный статистический анализ и временные ряды.—М.: Наука, 1976.—752 с.
3. *Демидович Б. П., Марон И. А.* Основы вычислительной математики.—М.: Физматгиз, 1963.—659 с.