ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Տեխնիկական գիտութ. սերիա XXXVII, № 5, 1984 Серия технических наук

ТЕХНИЧЕСКАЯ КИБЕРНЕТИКА

О. Н. ГАСПАРЯН

ИССЛЕДОВАНИЕ АВТОКОЛЕБАНИЙ В НЕЛИНЕЙНЫХ МНОГОСВЯЗНЫХ СИСТЕМАХ МЕТОДОМ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ

1. Введение. В работе дается распространение метода характеристических передаточных функций (ХПФ) [1] на задачу исследования одночастотных автоколебаний в нелинейных гармонически линеаризованных многосвязных системах автоматического регулирования (МСАР) с произвольным числом n входов и выходов.

2. Одночастотные симметричные автоколебания в МСАР общего вида. Рассмотрим нелинейную МСАР, матричная структурная схема которой представлена на рис. 1, где $W(p) = \|W_{im}(p)\| - n \times n$ матрица линейной части; $F(x) = \|F_{im}(x_m)\| - n \times n$ функциональная матрица нечетно-симметричных нелинейностей.

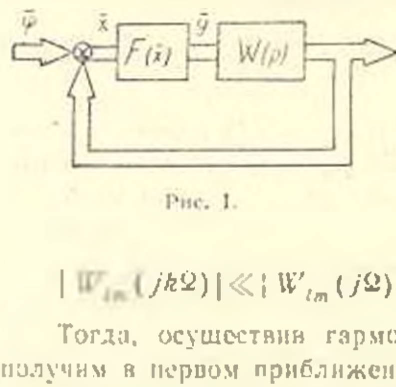

Рис. 1.

Допустим, что при отсутствии входных воздействий ($\bar\varphi(t) = \bar 0$) в МСАР устанавливается режим однозначных симметричных автоколебаний с частотой Ω и, кроме того, выполняется обобщенное свойство фильтра линейной части, имеющее вид:

$$|W_{im}(jk\Omega)| \ll |W_{im}(j\Omega)|, \quad i, m = 1, 2, \ldots, n, \quad k = 2, 3, \ldots \tag{1}$$

Тогда, осуществив гармоническую линеаризацию нелинейностей, получим в первом приближении (без учета высших гармоник) следующее векторное уравнение МСАР на рис. 1:

$$[I + W(j\Omega)G(\bar A)]\,\bar x = \bar 0, \tag{2}$$

где I — единичная матрица; $G(\bar A)$ — матрица, составленная из коэффициентов гармонической линеаризации нелинейностей $F_{im}(x_m)$; $\bar A$ — вектор амплитуд колебаний переменных x_i в отдельных каналах.

Матрица $Q(j\Omega, \bar A) = W(j\Omega)G(\bar A)$ является передаточной матрицей разомкнутой гармонически линеаризованной МСАР. В соответствии с идеями метода ХПФ ее можно записать при помощи преобразования подобия и диадной формы записи в виде:

$$Q(j\Omega,\ \bar{A}) = C(j\Omega,\ \bar{A})\,\mathrm{diag}\,\{q_i(j\Omega,\ \bar{A})\}\,C^{-1}(j\Omega,\ \bar{A}); \qquad (3)$$

$$Q(j\Omega,\ \bar{A}) = \sum_{i=1}^{n} \bar{c}_i(j\Omega,\ \bar{A})\rangle q_i(j\Omega,\ \bar{A})\langle \bar{c}_i^{+}(j\Omega,\ \bar{A}), \qquad (4)$$

где $C(j\Omega,\ \bar{A})$ — модальная матрица, составленная из нормированных собственных векторов $\bar{c}_i(j\Omega,\ \bar{A})$ матрицы $Q(j\Omega,\ \bar{A})$; $\bar{c}_i^{+}(j\Omega,\ \bar{A})$ — векторы, двойственные к $\bar{c}_i(j\Omega,\ \bar{A})$; $q_i(j\Omega,\ \bar{A})$ — собственные значения матрицы $Q(j\Omega,\ \bar{A})$.

Функции $q_i(j\Omega,\ \bar{A})$ назовем характеристическими передаточными функциями, а базис, составленный из $\bar{c}_i(j\Omega,\ \bar{A})$ — каноническим базисом гармонически линеаризованной МСАР. Нелинейные свойства линеаризованной МСАР проявляются именно в зависимости ХПФ и осей канонического базиса от вектора амплитуд $\bar{x}$. Диадная форма записи (1) допускает наглядную геометрическую интерпретацию внутренней структуры МСАР. ХПФ $q_i(j\Omega,\ \bar{A})$ можно считать передаточными функциями некоторых разомкнутых одномерных «характеристических» систем, каждая из которых действует вдоль определенного направления (оси канонического базиса) в n-мерном комплексном пространстве векторов $\bar{x}$. Подобная трактовка позволит выявить важные геометрические особенности поведения автоколебательных МСАР.

Подстановка (3) в (2) дает

$$C(j\Omega,\ \bar{A})\,\mathrm{diag}\,\{1 + q_i(j\Omega,\ \bar{A})\}\,C^{-1}(j\Omega,\ \bar{A})\,x = \bar{0}. \qquad (5)$$

Периодическое синусоидальное решение x уравнения (2) (или (3)) соответствует чисто мнимым корням характеристического уравнения

$$\det\,[I + Q(j\Omega,\ \bar{A})] = \prod_{i=1}^{n}[1 + q_i(j\Omega,\ \bar{A})] = 0. \qquad (6)$$

Из (6) следует, что гармонически линеаризованная МСАР будет иметь чисто мнимый корень только в том случае, если такой же корень имеет одна из замкнутых одномерных характеристических систем. Далее, для существования автоколебаний необходимо, чтобы остальные корни уравнения (6) находились в левой полуплоскости. С позиций метода ХПФ это означает, что остальные характеристические системы должны быть устойчивыми.

Перепишем уравнение (2) с учетом диадного представления (1) в виде:

$$x = -Q(j\Omega,\ \bar{A})\,x = -\left[\sum_{i=1}^{n} \bar{c}_i(j\Omega,\ \bar{A})\rangle q_i(j\Omega,\ \bar{A})\langle \bar{c}_i^{+}(j\Omega,\ \bar{A})\right]\bar{x}. \qquad (7)$$

Отсюда вытекает, что вектор $\bar{x}$ может быть решением уравнения (2), если только он направлен по какой-либо одной, например r-ой, оси канонического базиса МСАР, при дополнительном условии

$$q_r(j\Omega,\ \bar{A}) = -1, \qquad (8)$$

являющимся записанным в частотной форме условием нахождения r-ой характеристической системы на границе устойчивости.

Таким образом, в режиме установившихся автоколебаний в гармонически линеаризованной МСАР «возбуждается» только одна из одномерных характеристических систем. Остальные характеристические системы при этом устойчивы, а вектор $\bar{x}$ направлен по той оси канонического базиса, которая соответствует возбуждаемой характеристической системе, т. е.

$$x = \alpha c_r(j\Omega, \bar{A}). \quad (9)$$

где α — комплексный скаляр, модуль которого равен $|\alpha| = |\bar{x}| = |\bar{A}|$.

Условие (9) назовем условием коллинеарности векторов $\bar{x}$ и $\bar{c}_r(j\Omega, \bar{A})$. Из него непосредственно вытекает коллинеарность вектора амплитуд $\bar{A}$ и действительного вектора $\bar{m}_r(j\Omega, \bar{A})$, составленного из модулей компонент вектора $\bar{c}_r(j\Omega, \bar{A})$, т. е.

$$\bar{A} = |\bar{A}|\bar{m}_r(j\Omega, \bar{A}). \quad (10)$$

Из (9) также имеем, что сдвиги фаз колебаний в отдельных каналах равны аргументам компонент возбуждаемой оси канонического базиса $\bar{c}_r(j\Omega, \bar{A})$. Условия (8), (9) или (10), дополненные условием устойчивости остальных характеристических систем, представляют собой необходимые условия существования одночастотных симметричных автоколебаний в нелинейной МСАР на рис. 1.

При численном исследовании автоколебаний следует, с целью выявления всех возможных периодических режимов, последовательно проверить по указанным условиям каждую из n одномерных характеристических систем. Для конкретного индекса r можно предложить следующую процедуру расчета. Придадим в (10) модулю $|\bar{A}|$ и частоте Ω постоянные значения*. Тогда мы придем к нелинейному уравнению относительно неизвестного вектора амплитуд $\bar{A}$. Решая это уравнение общими методами (например, методом простых итераций, Ньютона—Рафсона и т. д. [2]), получим вектор $\bar{A}$, удовлетворяющий условию коллинеарности (10). Отметим, что соответствующее значение ХПФ $q_r(j\Omega, \bar{A})$ при этом находится в процессе вычисления правой части в (10) [2]. Следовательно, определив „коллинеарный" вектор $\bar{A}$, можно нанести на комплексную плоскость и соответствующую точку $q_r(j\Omega, \bar{A})$. Изменяя при $|\bar{A}| = \text{const}$ частоту Ω и решая каждый раз уравнение (10), получим r-ый характеристический годограф $q_r(j\Omega, \bar{A})$ при заданном $|\bar{A}| = \text{const}$. Если этот годограф про-

* В дальнейшем вектор амплитуд и частоту автоколебаний для определенности обозначим через $\bar{A}_*$ и Ω_*.

ходит через точку $-1, j0$, то в точке пересечения удовлетворяются оба необходимых условия (8), (10) возбуждения r-ой характеристической системы. При этом частота автоколебаний Ω_+ находится по годографу $q_r'(j\Omega, \bar{A})$, а сам вектор $\bar{A}_-$ является решением (10) при найденной частоте Ω_+ (рис. 2а). Если же при выбранном $|\bar{A}| = \mathrm{const}$ годограф $q_r(j\Omega, \bar{A})$ не проходит через точку $-1, j0$, то необходимо повторить расчеты, варьируя величину модуля $|\bar{A}|$.

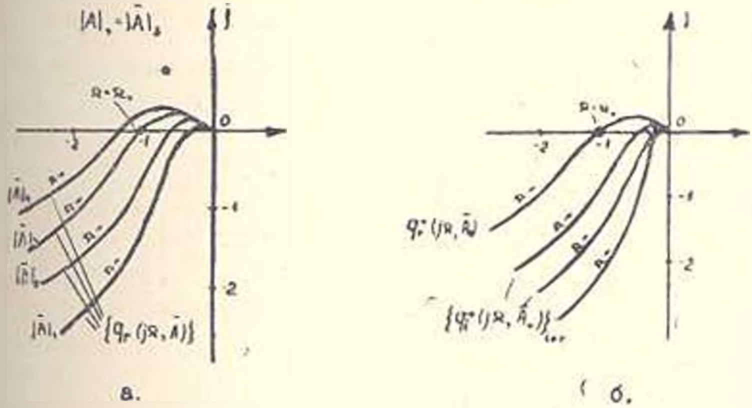

Рис. 2.

Для проверки устойчивости остальных характеристических систем нужно подставить найденный вектор $\bar{A}_+$ в передаточную матрицу $Q(j\Omega, \bar{A})$ и построить характеристические годографы $q_i(j\Omega, \bar{A}_+)$ последней при изменении частоты Ω. Тогда остальные характеристические системы будут устойчивыми в окрестности выявленного периодического режима с возбуждением r-ой системы, если ни один из годографов $q_i(j\Omega, \bar{A}_+)$ $(i \neq r)$ не охватывает точку $-1, j0$ (r-ый годограф при $\Omega = \Omega_+$ проходит через эту точку) (рис. 2б).

3. *Автоколебания в однотипных МСАР.* В однотипных МСАР (МОСАР) передаточные функции отдельных каналов являются одинаковыми (обозначим через $W(p)$), а взаимные связи описываются некоторой постоянной числовой матрицей R (рис. 3) [5]. Передаточная матрица $Q(j\Omega, \bar{A}) = W(j\Omega)G(\bar{A})R$ при этом совпадает с точностью до скалярного множителя $W(j\Omega)$ с матрицей $N(\bar{A}) = RG(\bar{A})$. Отсюда вытекает, что канонический базис гармонически линеаризованной МОСАР совпадает с каноническим базисом матрицы $N(\bar{A})$ и не зависит от $W(p)$, а ХПФ одномерных характеристических систем равны $q_i(j\Omega, \bar{A}) = \lambda_i(\bar{A})\, W(j\Omega)$, где $\lambda_i(\bar{A})$ — собственные значения матрицы $N(\bar{A})$. Последнее обстоятельство позволяет максимально приблизить методику исследования автоколебаний в МОСАР к классической методике Гольдфарба [3]. Для этого представим условие (8) в форме

$$W(j\Omega) = -1/\lambda_r(\bar{A}). \tag{11}$$

Согласно (11), для определения $\bar{A}$ и Ω, при которых r-ая характеристическая система находится на границе устойчивости, необходимо построить на комплексной плоскости годографа $W(j\Omega)$ параметрическую (с параметром $|\bar{A}|$) кривую $-1/\lambda_r(\bar{A})$ для векторов $\bar{A}$, удовлетворяющих условию коллинеарности (10) (рис. 4). Тогда точка пересечения этой кривой с $W(j\Omega)$ дает искомые $\bar{A}_*$ и Ω_*. Для проверки устойчивости остальных характеристических систем нужно отложить на той же плоскости критических точек $-1/\lambda_i(\bar{A}_*)$ $(i \neq r)$ матрицы $N(\bar{A}_*)$ и проанализировать их расположение относительно годографа $W(j\Omega)$ (рис. 4).

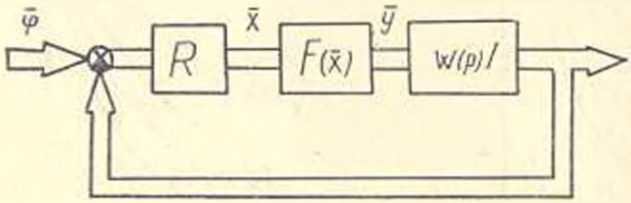

Рис. 3

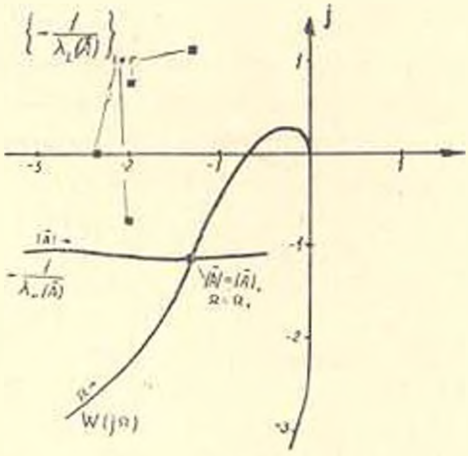

Рис. 4.

4. *Автоколебания в циркулянтных и антициркулянтных МСАР (ЦМСАР и АМСАР).* Интересными особенностями отличаются нелинейные МСАР, описываемые циркулянтными [4] и антициркулянтными передаточными матрицами. К таким МСАР относятся широко распространенные на практике простые симметричные и антисимметричные многосвязные системы [5]. Антициркулянтной в дальнейшем будем называть матрицу, каждая строка которой получается из предыдущей сдвигом на один элемент вправо, причем, последний элемент предыдущей строки становится первым элементом последующей с обратным знаком (в циркулянтных матрицах—с тем же знаком). В ЦМСАР и АМСАР имеется внутренняя симметрия между отдельными канала-

ми, что приводит к возможности существования автоколебательных режимов с одинаковыми амплитудами $A_i = A$ в отдельных каналах. При $A_i = A$ передаточная матрица $Q(j\Omega, A)$ ЦМСАР и АМСАР представляется в виде линейного полинома, соответственно, от ортогональной матрицы перестановок U [4] и матрицы перестановок U_- с изменением знака последнего элемента, имеющей вид:

$$U_- = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \dots 0 \\ 0 & 0 & 1 \dots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ -1 & 0 & 0 \dots 0 \end{bmatrix}.$$

Канонический базис ЦМАСАР (АМСАР) при этом совпадает с ортогональным каноническим базисом матрицы U (U_-) и является постоянным. Можно показать, что модули компонент всех собственных векторов матриц U и U_- одинаковы. Это значит, что при исследовании режима автоколебаний равных амплитуд в ЦМСАР необходимое условие коллинеарности (10) выполняется заведомо (что доказывает возможность существования данного режима) и вся задача сводится к определению частоты Ω и единственной амплитуды A, при которых некоторая r-ая характеристическая система находится на границе устойчивости, а все остальные системы — устойчивы. При этом можно применять стандартные методы классической теории регулирования [3].

26. X. 1983

Օ. Ն. ԳԱՍՊԱՐՅԱՆ

ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ԲԱԶՄԱԿԱՊ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐՈՒՄ ԻՆՔՆԱՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԻ ՀԵՏԱԶՈՏՈՒՄԸ ԲՆՈՒԹԱԳՐՈՂ ՓՈԽԱՆՑՄԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՄԵԹՈԴՈՎ

Ամփոփում

Տրված է բնութագրող փոխանցման ֆունկցիաների մեթոդի տարածումը կամայական չափողականություն ունեցող ոչ գծային բազմակապ ավտոմատ կարգավորման համակարգերում (ԲԱԿՀ) միահաճախական ինքնատատանումների հետազոտման խնդրի վրա։ Ստացված են ինքնատատանումների գոյության անհրաժեշտ պայմանները, նկարագրվում է թվային հաշվարկման մեթոդը։ Տրված են ինքնատատանումների վերլուծության առանձնահատկությունները ԲԱԿՀ-ի հատուկ դասերում։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Mac Farlane A. G. J., Belletrutti J. J.* The Characteristic Locus Design Method. — Automatica, 1973, v. 9, № 5, p. 575—558.
2. *Демидович Б. П., Марон И. А.* Основы вычислительной математики.—М.: Наука, 1970.—664 с.
3. *Попов Е. П.* Прикладная теория процессов управления в нелинейных системах.—М.: Наука, 1973.—584 с.
4. *Маркус М., Минк Х.* Обзор по теории матриц и матричных неравенств.—М.: Наука, 1972.—232 с.
5. *Морозовский В. Т.* Многосвязные системы автоматического регулирования.—М.: Энергия, 1970.—288 с.