ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Տեխնիկական գիտութ. սերիա XXXVII, № 5, 1984 Серия технических наук

МАШИНОСТРОЕНИЕ

Э. Е. ПЕЙСАХ, Ю. Л. САРКИСЯН

О ТОЧКАХ ДВИЖУЩЕЙСЯ ПЛОСКОЙ ФИГУРЫ, НАИМЕНЕЕ ОТКЛОНЯЮЩИХСЯ ОТ ПРЯМОЙ

Плоская фигура e движется в совпадающей с ней неподвижной плоскости E. С e и E жестко связаны прямоугольные координатные системы oxy и OXY, соответственно. Движение фигуры e в плоскости E задано посредством таблицы N последовательных дискретных значений X_{o_i}, Y_{o_i}, θ_i $(i = 1, 2, \ldots, N)$ трех ее обобщенных координат X_o, Y_o, θ, где X_o, Y_o — координаты точки o фигуры e в системе OXY, θ - угол между осями OX и ox, отсчитываемый от OX к ox против часовой стрелки.

Рассмотрим следующую задачу: определить точку B плоской фигуры e, которая в N рассматриваемых положениях в смысле наименьших квадратов возможно мало отклоняется от прямой a, принадлежащей плоскости E.

Подобная задача возникает при кинематическом синтезе плоских рычажных механизмов, в составе которых имеется звено, совершающее плоскопараллельное движение. Известные алгоритмы решения данной задачи [1, 2] являются в определенном смысле приближенными, поскольку в них в качестве функции отклонения искомой точки от приближаемой прямой принимались некоторые вспомогательные функции, не совпадающие с выражением отклонения, измеренного по нормали. В настоящей статье излагаются прямые процедуры решения рассматриваемой задачи, основанные на непосредственной минимизации отклонения по нормали.

В рассматриваемых положениях фигуры e расстояния по нормали точек B от приближаемой прямой a имеют вид

$$h_i = X_{B_i} \cos\alpha + Y_{B_i} \sin\alpha - P \qquad (i = 1, 2, \ldots, N), \tag{1}$$

где P, α — параметры прямой, а X_{B_i}, Y_{B_i} выражается через неизвестные координаты x_B, y_B в системе oxy посредством известных формул преобразования координат:

$$\begin{aligned} X_{B_i} &= X_{o_i} + x_B \cos\theta_i - y_B \sin\theta_i; \\ Y_{B_i} &= Y_{o_i} + x_B \sin\theta_i + y_B \cos\theta_i. \end{aligned} \tag{2}$$

В соответствии с формулировкой задачи за критерий близости рассматриваемых положений точки B к прямой σ будет принята сумма

$$S = \sum_{i=1}^{N} h_i^2, \tag{3}$$

представляющая собой функцию переменных α, P, x_B, y_B.

Соответственно, искомые параметры будут определены из системы уравнений:

$$\partial S/\partial P = 0; \quad \partial S/\partial\alpha = 0; \quad \partial S/\partial x_B = 0; \quad \partial S/\partial y_B = 0. \tag{4}$$

Для обоснования предлагаемого метода поиска минимума функции S отойдем временно от общий схемы решения задачи, полагая x_B и y_B заданными.

При известном положении точки B в системе oxy параметры приближаемой прямой σ найдутся из первых двух уравнений (4). С учетом выражения (1) эти уравнения можно привести к виду:

$$\begin{aligned} &a_1 \cos\alpha + a_2 \sin\alpha - PN = 0; \\ &a_4 \cos 2\alpha + \frac{1}{2}(a_5 - a_3)\sin 2\alpha - a_2 P\cos\alpha + a_1 P \sin\alpha = 0, \end{aligned} \tag{5}$$

где

$$a_1 = \sum X_{B_i}; \quad a_2 = \sum Y_{B_i}; \quad a_3 = \sum X_{B_i}^2;$$

$$a_4 = \sum X_{B_i} Y_{B_i}; \quad a_5 = \sum Y_{B_i}^2.$$

Из системы (5) получаем:

$$P = (a_1 \cos\alpha + a_2 \sin\alpha)/N; \tag{6}$$

$$2c_1 \cos 2\alpha + (c_2 - c_3)\sin 2\alpha = 0, \tag{7}$$

где

$$c_1 = Na_4 - a_1 a_2; \quad c_2 = Na_3 - a_1^2; \quad c_3 = Na_5 - a_2^2.$$

Из (7) находим:

$$\sin 2\alpha_{1,2} = \pm\frac{2c_1}{t}; \quad \cos 2\alpha_{1,2} = \pm\frac{c_3 - c_2}{t}, \tag{8}$$

где

$$t = \sqrt{4c_1^2 + (c_2 - c_3)^2}.$$

Подставим P из (6) в (1) и затем h_i в (3):

$$S = \frac{1}{2N}[(c_2 + c_3) + (c_2 - c_3)\cos 2\alpha + 2c_1 \sin 2\alpha]. \tag{9}$$

Подставим соотношения (8) в (9):

$$S_{12} = \frac{1}{2N}(c_2 + c_3 \pm t). \tag{10}$$

Из (10) видно, что $S_{\min} = S_2$. Отсюда

$$S = \frac{1}{2N}(c_2 + c_3 - t)$$

и

$$\sin 2\alpha = -\frac{2c_1}{t}, \qquad \cos 2\alpha = -\frac{c_2 - c_3}{t}. \tag{11}$$

Из (11) находим:

$$\cos\alpha = \varepsilon_1 \sqrt{\frac{t - c_2 + c_3}{2t}}; \qquad \sin\alpha = -\frac{c_1}{t\cos\alpha}, \tag{12}$$

где $\varepsilon_1 = +1$ или -1.

Значение ε_1 найдем из условия $P \geqslant 0$. Подставим из (12) в (6):

$$P = \varepsilon_1 \frac{a_1(t - c_2 + c_3) - 2a_2c_1}{N\sqrt{2t(t - c_2 + c_3)}}.$$

Отсюда следует, что

$$\varepsilon_1 = \operatorname{sign}[a_1(t - c_2 + c_3) - 2a_2c_1]. \tag{13}$$

Подставляя (13) в (12), определяем $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$, а затем из (6) величину P. Таким образом, определено соответствие, относящее любой точке B плоскости e единственную прямую σ, квадратически приближающую заданное множество N положений точки B.

Зададимся теперь углом α и определим значения x_B, y_B, P из необходимых условий минимума суммы (3). С этой целью подставим X_{B_i}, Y_{B_i} из (2) в (1) и преобразуем полученное выражение к виду

$$h_i = k_i x_B + l_i y_B - P + m_i \qquad (i = 1, 2, \dots, N), \tag{14}$$

где

$$k_i = \cos(\alpha - \theta_i); \qquad l_i = \sin(\alpha - \theta_i); \qquad m_i = X_{0_i}\cos\alpha + Y_{0_i}\sin\alpha.$$

Параметры x_B, y_B, P найдем из системы:

$$\partial S/\partial x_B = 0, \qquad \partial S/\partial y_B = 0, \qquad \partial S/\partial P = 0. \tag{15}$$

На основании (3) и (14) из (15) получаем следующую систему линейных уравнений относительно x_B, y_B, P:

$$\begin{bmatrix} \sum k_i^2 & \sum k_i l_i & -\sum k_i \\ \sum k_i l_i & \sum l_i^2 & -\sum l_i \\ \sum k_i & \sum l_i & -N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ P \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \sum m_i k_i \\ \sum m_i l_i \\ \sum m_i \end{bmatrix}. \tag{16}$$

Определитель D системы (16) можно преобразовать к виду:

$$D = \sum_{i=1}^{N} \left[\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} \sin(\theta_j - \theta_i) \right]^2 - N \sum_{1 \leq i < j \leq N} \sin(\theta_j - \theta_i).$$

Отсюда видно, что D не зависит от α.

Из системы (16) для любого фиксированного направления α приближающей прямой σ можно определить единственное сочетание параметров x_B, y_B, P.

Вернемся вновь к задаче определения минимума функции S по всем четырем искомым параметрам.

Можно указать простой путь вычисления минимума S, суть которого заключается в следующем. Подставляем выражения $x_B(\alpha)$, $y_B(\alpha)$, $P(\alpha)$ из системы (16) в (3) и получаем функцию одной переменной $S(\alpha)$. Далее решается задача определения такого значения α^*, при котором достигается наименьшее значение $S(\alpha)$. Вполне приемлемым является метод перебора угла α с шагом $\Delta\alpha = 1^\circ$ в пределах от 0 до 360°; уточнение значения α^* осуществляется уменьшением шага $\Delta\alpha$ в зоне предполагаемой точки глобального минимума.

Рассмотренную задачу можно решить и по минимаксному критерию, используя метод чебышевского приближения. Задача формулируется следующим образом: даны X_{0_i}, Y_{0_i}, θ_i $(i = 1, 2, \dots, N)$; определить в четырехмерном пространстве искомых параметров $\{P\}$ такое сочетание значений x_B^*, y_B^*, α^*, P^*, т. е. точку B^* и прямую σ^*, чтобы максимальное отклонение точек (положений) B_i' $(i = 1, 2, \dots, N)$ от σ^* было минимальным:

$$\max_{i \in [1:N]} |h_i(x_B^*, y_B^*, \alpha^*, P^*)| = \min_{\{P\}} \max_{i \in [1:N]} h_i(x_B, y_B, \alpha, P). \tag{17}$$

Задаваясь значением α, мы придем к системе N линейных функций (14). Определим чебышевскую точку этой системы, т. е. вектор $\{x_B^*, y_B^*, P^*\}$, для которого:

$$\max_{i \in [1:N]} |h_i(x_B^*, y_B^*, P^*)| = \inf_{\{x_B, y_B, P\}} \max_{i \in [1:N]} |h_i(x_B, y_B, P)|.$$

С этой целью приведем эту задачу к минимизации линейной формы $Z = L$ при ограничениях

$$|h_i| = |k_i x_B + l_i y_B - P + m_i| \leqslant L \qquad (i = 1, 2, \dots, N),$$

где L — отклонение чебышевского приближения.

Таким образом, приходим к классической задаче линейного программирования, которая может быть решена симплекс-методом [3]. Варьируя значением α в интервале $[0^\circ, 360^\circ]$ и решая соответствующую последовательность задач линейного программирования, можем найти то значение α^*, при котором L получает наименьшее значение. Соответствующее сочетание значений искомых параметров есть решение задачи (17).

ЕрПИ им. К. Маркса 20. IX. 1983

Է. Ե. ԳԵՅՍԱՆ, ՅՈՒ Լ. ՍԱՐԳՍՅԱՆ

ՇԱՐԺՎՈՂ ՀԱՐԹ ՊԱՏԿԵՐԻ ՈՒՂՂԻՑ ԱՄԵՆԱՔԻՉ ՇԵՂՎՈՂ ԿԵՏԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Հոդվածում ներկայացված են իր հետ համընկնող և անշարժ հարթության մեջ շարժվող հարթ պատկերի այնպիսի կետերի որոշման նոր ալգորիթմներ, որոնք տրված N ընդհատ դիրքերում ամենաքիչն են շեղվում ուղղից։ Այսպիսի կետերը կարող են օգտագործվել պինդ մարմնի տված հարթ-զուգահեռական շարժման կամ նրա առանձին կետերի պահանջվող հետագծերի մոտավոր վերարտադրության համար նախատեսվող հարթ լծակային մեխանիզմների կինեմատիկական սինթեզում։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Саркисян Ю. Л.* О прямолинейных квадратических точках в плоскопараллельном движении.— В кн.: Механика машин.— М.: Наука, 1975, вып. 48, с. 65—72.
2. *Саркисян Ю. Л.* Аппроксимационный синтез механизмов.— М.: Наука, 1982.— 304 с.
3. *Зуховицкий С. И., Авдеева Л. И.* Линейное и выпуклое программирование.— М.: Наука, 1964.— 348 с.