

Ю. М. ГАСПАРЯН

НАДЕЖНОСТЬ КОМБИНАЦИОННЫХ ЛОГИЧЕСКИХ СХЕМ

Вычислению надежности логических схем (ЛС) посвящено множество работ [1—6]. В [1—4] для анализа надежности ЛС используется функция соответствия, в [4] понятие обобщенной (приведенной к выходу) ошибки элемента схемы, а в [5] — метод обратного анализа. В [6] для анализа надежности ЛС применено понятие булевой производной, что упрощает использование ЭВМ.

В данной работе рассматривается метод анализа надежности ЛС с использованием понятия булевой производной с той разницей, что при вычислениях применяются только булевы производные отдельных элементов. Кроме того, первоначальная логическая схема преобразуется в приведенную сеть, обладающую свойством ортогональности, что существенно упрощает вычисление.

Определение 1. Производной булевой функции $f(x_1, \dots, x_n)$ по совокупности аргументов $x_{i_1}, \dots, x_{i_k} = [x_{i_1}, \dots, x_{i_k}]$ ($1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$) называется функция

$$\frac{df(\bar{x})}{d\bar{x}_{i_1, \dots, i_k}} = f(\bar{x}) \oplus f(x_1, \dots, \bar{x}_{i_1}, \dots, \bar{x}_{i_k}, \dots, x_n). \quad (1)$$

В частном случае производная булевой функции $f(\bar{x})$ по аргументу x_i определяется соотношением

$$\frac{df(\bar{x})}{dx_i} = f(\bar{x}) \oplus f(x_1, \dots, x_{i-1}, \bar{x}_i, x_{i+1}, \dots, x_n). \quad (2)$$

Определение 2. Нормой булевой функции $f(\bar{x})$ называется число

$$\|f(\bar{x})\| = \sum_{\bar{a} \in E^n} P(\bar{a}) f(\bar{a}), \quad (3)$$

где $P(\bar{a})$ — вероятность появления набора $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n)$; $\bar{a} \in E^n$, причем, $\sum_{\bar{a} \in E^n} P(\bar{a}) = 1$.

Рассмотрим комбинационную схему S с одним выходом y и входами $x_1, \dots, x_n$, состоящую из N элементов $a_1, \dots, a_N$. Выход i -го элемента обозначим через a_i . Тогда вероятность передачи ошибки (типа „Не“) с выхода i -го элемента на выход схемы P_i^* будет определяться соотношением

$$P_i^* = P\left(\frac{dy}{da_i} = 1\right) \quad i = \overline{1, N},$$

где $P\left(\frac{dy}{da_i} = 1\right)$ — вероятность того, что булева производная выхода схемы y относительно выхода элемента a_i равна единице.

Имея значения P_i^* , $i = \overline{1, N}$, с помощью равенства [5, 6] можно вычислить надежность ЛС:

$$P_c = 1 - \sum_{i=1}^N \varepsilon_i P_i^*, \quad (4)$$

где ε_i — вероятность появления ошибки на выходе элемента a_i . Из (4) очевидно, что основной проблемой при нахождении P_c является вычисление P_i^* , $i = \overline{1, N}$.

В данной работе предлагается итерационная процедура вычисления P_i^* , $i = \overline{1, N}$, которая существенно упрощает объем вычислений.

Вначале рассмотрим способ вычисления P^* для двух классов ЛС.

Класс 1. Любая схема этого класса состоит из последовательно соединенных между собой элементов (рис. 1а). Для ЛС, принадлежащей классу 1, доказывается следующее.

Теорема 1.

$$\frac{da_n}{da_0} = \frac{da_n}{da_{n-1}} \cdot \frac{da_{n-1}}{da_{n-2}} \cdot \dots \cdot \frac{da_2}{da_1} \cdot \frac{da_1}{da_0}. \quad (5)$$

На рис. 1б показана приведенная сеть передачи ошибки для схем, принадлежащих классу 1.

Класс 2. Любая схема из этого класса имеет структуру, показанную на рис. 2. Для ЛС, принадлежащей классу 2, доказывается следующее утверждение.

Теорема 2. Для любой ЛС, принадлежащей классу 2 и состоящей из $n+1$ элементов, существует приведенная сеть передачи ошибки от входа на выход схемы, обладающая следующими свойствами:

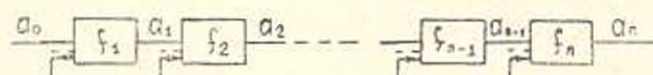
а) структура приведенной сети представляет собой двухполюсник, состоящий из $2^n - 1$ параллельно соединенных ветвей;

б) приведенная сеть обладает свойством ортогональности в том смысле, что все конъюнкции булевых переменных, характеризующие состояния ветвей, равны нулю.

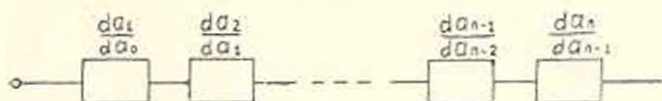
При доказательстве теоремы используется следующее равенство для ЛС, принадлежащей классу 2 (рис. 2):

$$\frac{dz}{da_0} = \bigvee_{i=1}^n \frac{dz}{da_i} \cdot \frac{da_i}{da_0} \prod_{j=1}^n \frac{\overline{dz}}{da_j} \vee \bigvee_{i=1}^n \bigvee_{j=1}^n \frac{d^2 z}{d(a_i a_j)} \cdot \frac{da_i}{da_0} \cdot \frac{da_j}{da_0} \prod \frac{df_l}{da_0} \vee \dots$$

$$\dots \vee \frac{da_1}{da_0} \dots \frac{da_n}{da_0} \cdot \frac{d^n z}{d(a_1 \dots a_n)}.$$
(6)



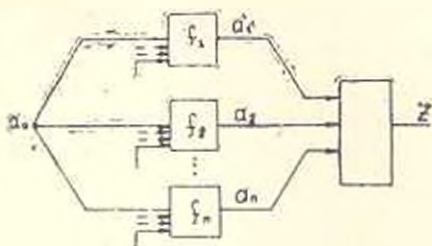
а.



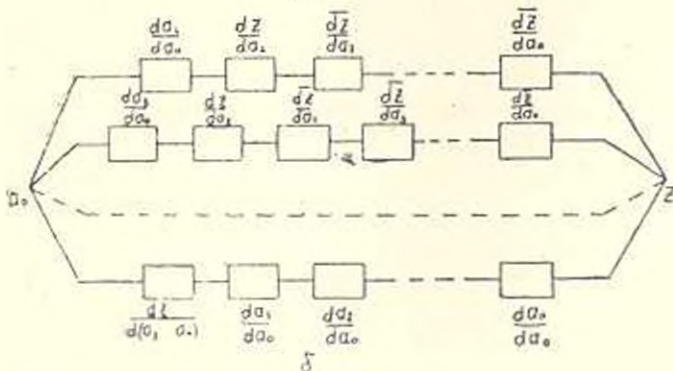
б.

Рис. 1. а) Логическая схема, принадлежащая классу 1;
б) приведенная сеть передачи ошибки.

На рис. 2б показана приведенная сеть передачи ошибки для схемы, принадлежащей классу 2.



а.



б.

Рис. 2. а) Логическая схема, принадлежащая классу 2;
б) приведенная сеть передачи ошибки.

Теперь рассмотрим вопрос передачи ошибки в ЛС с произвольной структурой с одним входом и одним выходом.

Доказывается следующее утверждение.

Теорема 3. Для любой ЛС с одним входом a_0 и одним выходом z существует приведенная сеть передачи ошибки от a_0 к z , обладающая следующими свойствами:

- а) структура приведенной сети представляет собой двухполюсник, состоящий из параллельно и последовательно соединенных элементов;
- б) приведенная сеть обладает ортогональностью в том смысле, что все конъюнктивные булевых переменных, характеризующие состояние параллельно соединенных элементов, равны нулю.

Доказательство. Предположим, что выходной элемент схемы S имеет k входов (рис. 3а). Тогда ЛС можно отнести к классу 2 (рис. 2а), если в качестве элемента $a_i, i = 1, k$ рассмотреть подсхему схемы S с входом a_0 и выходом a_i , включающую те элементы S , выходы которых непосредственно или через другие элементы связаны с a_i . Поэтому, согласно теореме 2, для S можно построить приведенную сеть передачи ошибки от входа ЛС a_0 к выходу z , состоящую из $2^k - 1$ параллельно соединенных ветвей, каждая из которых состоит из последовательно соединенных элементов, состояния которых определяются булевыми производными, т. е. элементы могут находиться в состоянии 0 или 1 (рис. 3б). Ветвям полученной приведенной сети соответствуют элементы, состояния которых определяются булевыми производными типа $\frac{da_i}{da_0}, i = 1, k$. Применяя аналогичные рассуждения, можно построить приведенные сети для этих элементов. Построение приведенной сети для ЛС заканчивается тогда, когда в ней появляются элементы, состояния которых определяются булевыми производными выходов тех элементов относительно a_0 , входами которых является a_0 .

Из алгоритма построения приведенной сети очевидно, что она является двухполюсником и что на i -ой итерации некоторые элементы, полученные в $(i-1)$ -ой итерации, заменяются параллельно-последовательными структурами. Этим доказывается первый пункт теоремы.

Свойство ортогональности приведенной сети в смысле теоремы п. 2 исходит из свойства ортогональности приведенной сети схемы, принадлежащей классу 2. Так как в i -ой итерации при построении приведенной сети получаем параллельно соединенную структуру, которая обладает свойством ортогональности, то это свойство сохраняется и в $(i+1)$ -ой итерации. Этим доказывается третий пункт теоремы. Теорема доказана.

Перейдем к описанию алгоритма вычисления P_i .

1. Из ЛС S выделить подсхему, входом которой является выход элемента a_i , а выходом -- выход S и которая включает все элементы, выходы которых непосредственно или через другие элементы связаны с выходом S .

2. Построить приведенную сеть подсхемы, полученной в первом шаге.

3. Вычислить булевы производные выходов всех элементов относительно их входов, которые принадлежат подсхеме, полученной в первом шаге.

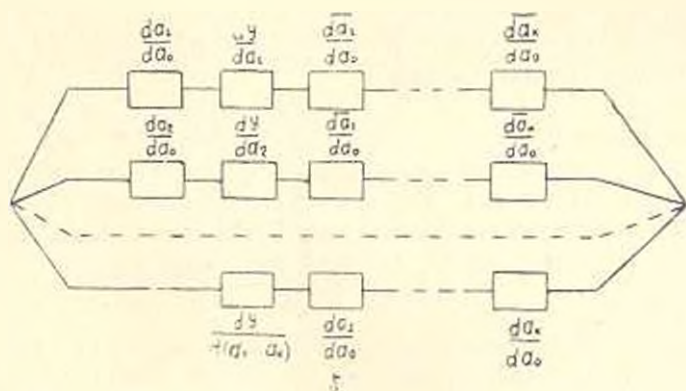
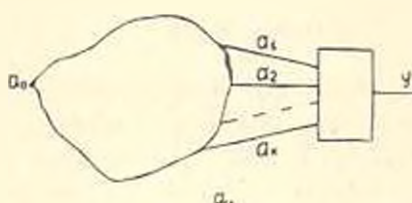


Рис. 3. а) Логическая схема в общем виде; б) приведенная сеть логической схемы.

4. Согласно (5) вычислить булевы функции, характеризующие состояния ветвей.

5. Используя (3) и (6), вычислить P_i^* , $i = \overline{1, n}$ для приведенной сети.

6. Согласно формуле (4) вычислить P_c .

Эти результаты легко распространяются на ЛС с m выходами, если определить понятие «отказ» на выходе такой схемы. Если отказом ЛС считать появление ошибки по крайней мере на одном выходе ЛС, то задача определения P_i^* , $i = \overline{1, n}$ сведется к задаче определения надежности ЛС с одним выходом. Для этого к схеме нужно добавить один элемент с логикой «ИЛИ», входами которого являются все выходы исследуемой ЛС. Если отказом ЛС считается такое состояние на выходах схемы, при котором хотя бы на k выходах из m появляется ошибка, то необходимо к схеме добавить элемент с порогом k . В общем случае для оценки надежности ЛС с m выходами нужно найти булеву функцию, выражающую зависимость отказа ЛС от распределения ошибок на выходах ЛС и добавить к первоначальной схеме выходной элемент, реализующий эту функцию. Таким образом, если возможно определить состояние отказа ЛС, то задача оценки надежности ЛС с m выходами сведется к задаче анализа ЛС с одним выходом.

ՀԱՄԱԿԱՅՎԱԾ ՏՐԱՄԱՐԱՆԱԿԱՆ ՍԽԵՄԱՆԵՐԻ ՀՈՒՍԱԿՐՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ

Ա մ փ ո փ ո ս մ

Դիտարկվում է համազգացված տրամաբանական սխեմաների հուսալիության պետահատման մեթոդ՝ բուլյան ածանցյալների օգտագործմամբ: Տրամաբանական սխեմայի հուսալիության վերլուծման համար կառուցվում է համարմեր քանց, որը իրենից ներկայացնում է երկրենեո և օմտված է մոնոտոնության հասկոնություն:

Համարմեր քանցի էլենմենտների վիհակր բնութագրում է այն էլենմենտների՝ իրենց մոտքերի նկատմամբ էլենրի բուլյան ածանցյալներով, որը էտպես պարտենում է հուսալիության հաշվարկր:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Микирон С. В. Вероятностные расчеты автоматных схем — В сб. Вычислительные системы, вып. 4. Изд-е математ. СО АН СССР, 1962, с. 29—53.
2. Милослав В. А. Надежность переключаемых схем — Автоматика и телемеханика, 1964, т. 25, № 9, с. 1375—1383.
3. Черкас М. А. О надежности логических переключаемых схем — В сб. Вычислительная техника и вопросы программирования, ЛГУ, вып. 2, 1963, с. 16—38.
4. Момыляков Н. Н. О надежности устройств автоматизма с учетом их структуры — В Ленинград. дом научн. техн. пропаг., 1965 — 58 с.
5. Левин В. М. Анализ логических схем с высоконадежными элементами — Автоматика и телемеханика, 1970, № 6, с. 111—117.
6. Боровик Ш. Е. Некоторые свойства булевых дифференциалов и активностей аргументов булевых функций. — Проблемы передачи информации, 1978, т. XIV, вып. 1, с. 77—89.