

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА.

Г. Б. ШАХАЗИЗЯН

ВЫПУЧИВАНИЕ КРУГЛОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛИТЫ
 В УСЛОВИЯХ ПОЛЗУЧЕСТИ

Задача устойчивости круглой, упругой плиты рассмотрена в [1], а вопросам устойчивости и выпучивания при ползучести посвящены работы [1—6] и др. Подробная библиография и анализ работ в этой области даны в [5].

В статье рассматривается круглая шарнирно-заделанная гибкая трехслойная плита с начальной погибью при радиальных сжимающих усилиях $P_r(t)$, равномерно распределенных вдоль контура (рис. 1). Материал наружных тонких усиливающих слоев предполагается упругим, а средний слой подчиняющимся наследственной теории ползучести Маслова—Арутюняна [2].

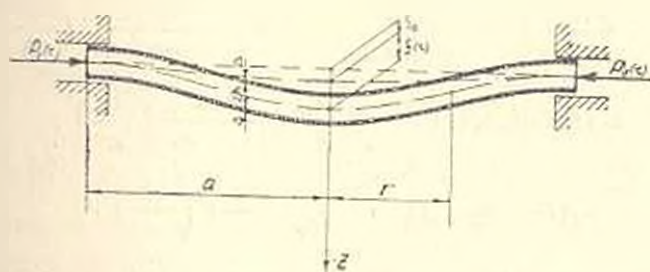


Рис. 1

Результаты работы могут быть применены при проверке выпучивания диафрагм в трубах круглого сечения, находящихся под гидростатическим давлением.

Согласно принципу возможных перемещений имеем:

$$\iint \{ N_r(t) \delta e_r(t) + N_\theta(t) \delta e_\theta(t) + M_r(t) \delta \kappa_r(t) + M_\theta(t) \delta \kappa_\theta(t) \} r dr d\theta - \int_0^{2\pi} P_1(t) a \delta u(a, t) d\theta = 0, \quad (1)$$

где результирующие силы $N_r(t)$, $N_\theta(t)$ и моменты $M_r(t)$, $M_\theta(t)$ в сечениях определяются согласно [6].

Примем как и в [1]:

$$w_0(r) = f_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^2; \quad w(r, t) = f(t) \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^2; \quad (9)$$

$$w_*(r, t) = [f_0 + f(t)] \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^2,$$

где f_0 — заданная начальная стрелка плиты, а $f(t)$ — неизвестный, изменяющийся во времени прогиб в середине плиты.

Подставляя (9) в (7) и производя необходимые выкладки с учетом краевых условий (2), получим:

$$\frac{\partial \Phi(r, t)}{\partial r} = -\frac{1-\nu^2}{6r} \left\{ A_0(t) [f^2(t) + 2f_0 f(t)] - \int_0^t B_0(\tau) [f^2(\tau) + 2f_0 f(\tau)] R(t, \tau) d\tau \right\} F(r) - P(t)r, \quad (10)$$

где
$$F(r) = 3\frac{r}{a} - 6\frac{r^3}{a^3} + 4\frac{r^5}{a^5} - \frac{r^7}{a^7}.$$

Далее, внося (9) и (10) в (8), интегрируя и вводя безразмерные параметры:

$$\zeta(t) = \frac{f(t)}{f_0}; \quad \xi = \frac{f_0}{2h}; \quad P(t) = \frac{P_1(t)}{4hE(t)} \xi \left(\frac{a}{2h}\right)^4;$$

$$\alpha_1(t) = \beta_1 \mu_1(t); \quad \beta_1 = \frac{16\xi}{3(1-\nu^2)} \left(\frac{2h}{a}\right)^4; \quad (11)$$

$$\alpha_2(t) = \beta_2 \mu_0(t); \quad \beta_2 = \frac{6\xi}{7} \xi \left(\frac{2h}{a}\right)^4.$$

получим нелинейное интегральное соотношение для определения $\zeta(t)$:

$$\alpha_1(t)\zeta(t) + \alpha_2(t)[\zeta^2(t) + 3\zeta^2(t) + 2\zeta(t)] =$$

$$= P(t)[\zeta(t) + 1] + \int_0^t \beta_1(t, \tau)\zeta(\tau)R(t, \tau)d\tau +$$

$$+ [\zeta(t) + 1] \int_0^t \beta_2(t, \tau)[\zeta^2(\tau) + 2\zeta(\tau)]R(t, \tau)d\tau. \quad (12)$$

Для определения критического времени и критических сил, зададим критическое состояние плиты предельным отношением

$$\zeta_{кр} = \zeta_{10} = \frac{f_1(t)}{f_0}.$$

т. е. исходим из допустимого прогиба плиты [3, 5].

Подставляя принятое предельное значение относительного прогиба $\zeta_0 = \zeta_{10}$ в уравнение (12) и принимая $t = \tau_1$, найдем значение мгновенной критической силы P_0 , при котором предельное состояние плиты достигается в начальный момент $t = \tau_1$ вследствие упругих деформаций:

$$P_0 = \frac{a_1(\tau_1)\zeta_{10} + a_2(\tau_1)(\zeta_{10}^3 + 3\zeta_{10}^2 + 2\zeta_{10})}{\zeta_{10} + 1}. \quad (13)$$

Принимая для простоты $P(t) = P = \text{const}$, а средний слой плиты — из нестареющего материала, предельным переходом при $t \rightarrow \infty$ из уравнения (12) определим значение длительной критической силы P_{∞} , приводящей плиту к предельному состоянию $\zeta = \zeta_{10}$, когда $t \rightarrow \infty$:

$$P_{\infty} = \frac{A\zeta_{10} + B(\zeta_{10}^3 + 3\zeta_{10}^2 + 2\zeta_{10})}{\zeta_{10} + 1}, \quad (14)$$

где

$$A = \frac{16\zeta}{3(1-\nu^2)} \left(\mu_1 - \frac{\lambda}{\gamma} \right), \quad B = \frac{6\pi}{7} \zeta^3 \left(\mu_0 - \frac{\lambda}{\gamma} \right).$$

Для значения P , находящегося $P_{\infty} < P < P_0$, существует критическое время T , при котором прогиб плиты принимает предельное значение.

Дифференцируя по t уравнение (12), получим:

$$\begin{aligned} & \left\{ a_1 + a_2 [3\zeta^2(t) + 6\zeta(t) + 2] - P - \beta_0 \right\} [\zeta^3(\tau) + 2\zeta(\tau)] e^{-\gamma(t-\tau)} d\tau \Big|_0^t v(t) = \\ & = \gamma \{ P[\zeta(t) + 1] - A\zeta(t) - B[\zeta^3(t) + 3\zeta^2(t) + 2\zeta(t)] \}. \end{aligned} \quad (15)$$

Исключая интеграл из (12) и (15), приходим к системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{\zeta}(t) = v(t); \\ \dot{v}(t) = \gamma v(t) + m(\zeta, p) v^2(t) + n(\zeta, p) v^3(t). \end{cases} \quad (16)$$

Здесь введены обозначения:

$$\begin{aligned} m(\zeta, p) &= [S_1\zeta(t)[\zeta(t) + 2] - S_2 + 2P] d(\zeta, p); \\ n(\zeta, p) &= [S_0[\zeta(t) + 1]] d^{-1}(\zeta, p); \\ S_0 &= \frac{36}{7} \frac{\mu_0}{\gamma} \zeta_0^3; \quad S_1 = \frac{12}{7} \left(3\mu_0 - 2 \frac{\lambda}{\gamma} \right) \zeta_0^3; \\ S_2 &= \frac{16\zeta_0}{3(1-\nu^2)} \left(2\mu_1 - \frac{\lambda}{\gamma} \right) + \frac{12}{7} \left(2\mu_0 - \frac{\lambda}{\gamma} \right) \zeta_0^3; \\ d(\zeta, p) &= P[\zeta(t) + 1] - A\zeta(t) - B[\zeta^3(t) + 3\zeta^2(t) + 2\zeta(t)]. \end{aligned} \quad (17)$$

Обозначая начальные значения $\zeta(t)$ и $v(t)$ при $t = \tau_1$ через ζ_1 и v_1 , из (12) и (15) получим начальные условия систем дифференциальных уравнений (16):

$$a_1 \zeta_1 + a_2 (\zeta_1^3 + 3\zeta_1^2 + 2\zeta_1) = P(\zeta_1 + 1); \quad (18)$$

$$v_1 = \frac{P(\zeta_1 + 1) - A\zeta_1 - B(\zeta_1^3 + 3\zeta_1^2 + 2\zeta_1)}{a_1 + a_2(3\zeta_1^2 + 6\zeta_1 + 2) - P}$$

где $\zeta(\tau_1) = \zeta_1$ — действительный положительный наименьший корень первого уравнения (18).

На основании численного интегрирования систем дифференциальных уравнений (16) с начальными условиями (18), на примере железобетонной плиты при значениях параметров $E_1 = 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$, $E = 2 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2$, $C = 0,9 \cdot 10^{-5} \text{ см}^2/\text{кг}$, $\nu = 0,3$, $\tau = 0,026 \text{ 1/сутки}$, $\varepsilon_0 = 0,1$, $\zeta_{np} = 10$, произведенного на ЭВМ «Наирн-2», построены графики зависимости P от T для различных значений $\mu = \frac{\Delta}{h}$ (рис. 2).

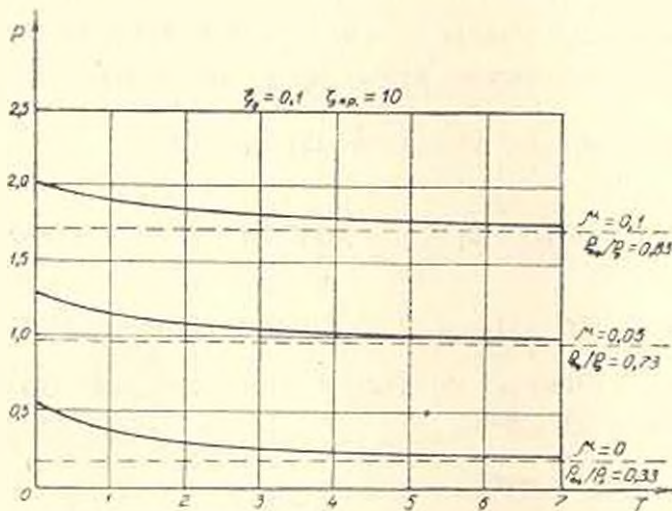


Рис. 2.

Из графиков заключаем, что с увеличением толщины усиливающих слоев Δ , существенно увеличивается P_0 , P_{00} , а также отношение $\frac{P_2}{P_0}$.

Так, применение трехслойных элементов со значениями $\frac{E_0}{E_1} = 0,1$ при $\mu = \frac{\Delta}{h} = 0,1$ по отношению к однослойным (однородным $\mu = 0$) приводит к увеличению P_0 почти в 4, P_{00} — в 8,5 раз, а отношение $\frac{P_{00}}{P_0}$ возрастает на 150%.

ԵՌԱՇԵՆԻՍ ԿԼՈՐ ՍԱԼԻ ՈՒՌԵՑՈՒՄԸ ՍՈՎԷՏԻ ԳԱՅՄԱՆՆԵՐՈՒՄ

Ա մ փ ո փ ո մ

Բերվում է սկզբնական ճկվածքով եռաշերտ սալի ուռեցման խնդիրը եզրագծով շառավղային ուղղություններով հավասարաչափ սեղմման դեպքում: Արտաքին ուժեղացնող շերտերի նյութը ընդունվում է առաձգական, իսկ միջին շերտի համար հաշվի է առնվում սողքը՝ ըստ Մասլով-հարությունյանի ժառանգական տեսության:

Հնարավոր տեղափոխումների սկզբունքի հիման վրա կազմված է խնդրի փոփոխական չափասարտմը, որը բերվում է առաջին կարգի փոփոխական գործակիցներով երկու դիֆերենցիալ հավասարումներից կազմված համակարգի, որոնց թվային ինտեգրման արդյունքները երկաթբետոնե սալի օրինակի վրա ներկայացված են գրաֆիկների միջոցով: Սալի ալկնթարթային և երկարատև կալունությունյան դեպքում կրիտիկական ուժի որոշման համար ստացված են հաշվարկային արտահայտություններ:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Вольмир А. С. Устойчивость упругих систем — М. Физматгиз, 1963 — 880 с.
2. Арутюнян Н. Х. Некоторые вопросы теории ползучести. — М.—Л. ГИИТЛ, 1952 — 324 с.
3. Работнов Ю. Н., Шестериков С. А. Устойчивость стержней и пластинок в условиях ползучести. — ПММ, 1957, т. 21, вып. 3, с. 21—28.
4. Ржаницын А. Р. Устойчивость при ползучести. — В сб.: Проблемы устойчивости в строительной механике. — М.: Стройиздат, 1965, с. 104—118.
5. Куришич Л. М. О постановках задач устойчивости в условиях ползучести (Обзор). — Механика. Новое в зарубежной науке, 1979, № 18, с. 246—302.
6. Забяян М. А., Шахазизян Г. Б. О несущей способности круглой трехслойной плиты при ползучести. — Изв. АН АрмССР. Механика, 1978, т. 31, № 6, с. 55—63.