ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Տեխնիկական գիտութ. սերիա XXXVII, № 1, 1984 Серия технических наук

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА

С. С. АВЕТИСЯН, Ю. А. КУТОЯНЦ

О НЕКОТОРЫХ МОДЕЛЯХ ТОЧЕЧНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЗАДАЧАХ ПРОФИЛАКТИЧЕСКОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Теория точечных процессов в последние годы бурно развивается. Помимо общих результатов типа представлений процессов, условий абсолютной непрерывности мер и вопросов фильтрации решен ряд задач по постановке близких к классической математической статистике, такие, как оценка параметров и проверки гипотез [1—3]. В настоящее время имеется и развитая теория больших выборок для точечных процессов (закон больших чисел, центральная предельная теорема и т. д.) [3, 4]. Все это расширяет возможности и для решения конкретных задач прикладного характера, т. к. позволяет выдвигать содержательные математические модели, допускающие экспериментальную проверку и идентификацию.

Основными объектами исследования в теории надежности традиционно являются функция распределения времени безотказной работы системы или функция интенсивности отказов [5]. Имеются определенные трудности при описании влияния предыстории на состояние системы, например, интересен вопрос: как влияют предыдущие отказы на поведение системы в настоящий момент. При этом предполагается, что далекие во времени (старые) отказы слабо влияют, а близкие (свежие) — сильнее. Кроме того, при описании последовательностей отказов элементов системы интересно учесть влияние отказов одних элементов на состояние других. В настоящей работе вводится один класс точечных процессов — процессы пуассоновского типа [1] и рассматривается применение этих процессов к описанию функционирования технических систем (ТС).

Пусть задано k последовательностей случайных величин

$$\tau^{(j)} = \{\tau_1^{(j)}, \tau_2^{(j)}, \ldots\}, \quad j = 1, \ldots, k,$$

где при каждом j $\tau_1^{(j)} > 0$, $\tau_i^{(j)} < \tau_{i+1}^{(j)}$, а $N^{(j)}(t)$ — число событий попавших в интервал $[0, t]$ ($N^{(j)} = \{N^{(j)}(t), t \geqslant 0\}$ — считающий процесс [1]). Это задание эквивалентно $N^{(j)}$. Процесс пуассоновского типа $N = (N^{(1)}, \ldots, N^{(k)})$ определим, как многомерный случайный процесс, для которого условные вероятности записываются в виде:

$$P\{N^{(j)}(t+\Delta t)-N^{(j)}(t)=1\,|\,N(s),\ 0\leqslant s\leqslant t\}=\lambda^{(j)}(t)\,\Delta t+o(\Delta t);$$
$$P\{N^{(j)}(t+\Delta t)-N^{(j)}(t)>1\,|\,N(s),\ 0\leqslant s\leqslant t\}=o(\Delta t), \tag{1}$$

где в условии стоит все прошлое процесса N до момента t. Неотрицательный случайный процесс $\lambda^{(j)}(t)$ считаем интегрируемым с вероятностью 1 на любом ограниченном интервале $[0, T]$ при $j=1, \ldots, k$. Процесс $\lambda^{(j)}(t)$ назовем интенсивностью точечного процесса $N^{(j)}$. Задание интенсивности полностью определяет меру P процесса пуассоновского типа в пространстве его реализаций [1], поэтому в последующем, выбирая конкретные случайные процессы $\lambda^{(j)}(t)$ (зависящие от прошлого $N(s)$, $0\leqslant s\leqslant t$), мы получим разные математические модели. Если $\lambda^{(j)}(t)$ — неслучайная функция, то получаем неоднородный процесс Пуассона этой интенсивности.

Наиболее распространенной является модель процесса со взаимным возбуждением (mutually-exciting), введенная Хоксом [6]. Согласно этой модели:

$$\lambda^{(j)}(t)=\nu_j+\sum_{i=1}^{k}\int_0^t g_{ij}(t-s)\,dN^{(i)}(s), \tag{2}$$

где последний интеграл понимается в смысле Лебега-Стилтьеса. Например, для непрерывных функций:

$$\int_0^t g(s)\,dN^{(i)}(s)=\sum_{\tau_l^{(i)}<t} g(\tau_l^{(i)}).$$

Конкретизация (2) заключается теперь только в определении функций $g_{ij}(t)\geqslant 0$.

Данное выше определение позволяет учитывать взаимное влияние последовательностей $\tau^{(j)}$ друг на друга, которое полностью задается функциями $g_{ij}(t)$, т. е. получить коррелированные последовательности событий. Имеется спектральная теория этих точечных процессов [6].

Пусть $k=1$. Точечный процесс с интенсивностью (2) называется процессом с самовозбуждением (self-exciting), т. к. события этого процесса до момента t определяют интенсивность в этот момент. Рассмотрим пример одного процесса с самовозбуждением и обсудим возможности описания функционирования ТС. Примем:

$$g(t)=\begin{cases}\alpha e^{-\beta t}, & t\geqslant 0;\\ 0, & t<0,\end{cases} \tag{6}$$

где $\alpha>0$, $\beta>0$. При условии $\alpha<\beta$ получаем стационарный точечный процесс со спектральной плотностью

$$f(\omega)=\frac{\varkappa}{2\pi}\left\{1+\frac{\alpha(2\beta-\alpha)}{(\beta-\alpha)^2+\omega^2}\right\},$$

где $\varkappa=\mu\beta/(\beta-\alpha)$ [6]. Реализация соответствующего процесса $\lambda(t)$ — разрывная функция в точках τ_i, скачки которой вверх равны α, и убывающая между скачками. Это поведение $\lambda(t)$ допускает следующую трактовку. Имеется ТС, состоящая из некоторого числа элементов. Отказ системы в результате отказа одного элемента может ухудшать надежностные показатели остальных элементов (например, из-за перегрузок), поэтому после восстановления отказавшего элемента система имеет повышенную вероятность отказа. Далее вероятность отказа уменьшается, т. к. происходит приработка нового элемента и остальные элементы постепенно приходят в состояние нормальной работы. Кроме того, известно, что интенсивность послеремонтных отказов экспоненциально убывает с увеличением времени [7].

Нас интересует процесс с самовозбуждением, интенсивность которого со временем растет, что отвечает старению ТС, поэтому считаем выполненным условие $\alpha>\beta$. С учетом этого рассмотрим задачу определения оптимального срока проведения предупредительной замены. Сперва определим функцию $m(t)=E\lambda(t)$. Согласно (2):

$$m(t)=\mu+\int_0^t g(t-\tau)\,m(\tau)\,d\tau, \qquad (4)$$

так как [1]:

$$E\int_0^t f(\tau)\,dN(\tau)=\int_0^t f(\tau)\,E\lambda(\tau)\,d\tau.$$

Подставляя (3) в (4), умножая обе части полученного равенства на $e^{\beta t}$ и вводя обозначение $n(t)=m(t)\,e^{\beta t}$, приходим к уравнению

$$n(t)=\mu e^{\beta t}+\alpha\int_0^t n(\tau)\,d\tau,$$

которое дифференцированием по t сводится к линейному неоднородному дифференциальному уравнению

$$\frac{dn(t)}{dt}-\alpha n(t)=\mu\beta e^{\beta t}, \qquad n(0)=\mu.$$

Следовательно:

$$n(t)=\frac{\mu\alpha}{\alpha-\beta}e^{\alpha t}-\frac{\mu\beta}{\alpha-\beta}e^{\beta t}.$$

Окончательно получим:

$$m(t)=\frac{\mu\alpha}{\alpha-\beta}e^{(\alpha-\beta)t}-\frac{\mu\beta}{\alpha-\beta}.$$

Таким образом, средняя интенсивность отказов при условии $\alpha > \beta$ со временем экспоненциально растет, т. е. система стареет.

Заметим, что в случае $\alpha = \beta$:

$$m(t) = \mu(1 + \beta t),$$

т. е. средняя интенсивность линейно растет.

Введем следующие обозначения: c_1, c_2 — стоимости восстановления отказа и предупредительной замены; T — общая продолжительность функционирования ТС; M — число предупредительных замен за это время; τ — период проведения предупредительных замен. Принимаем $M = \frac{T}{\tau}$ целым числом, а восстановление отказавшего элемента — мгновенным.

Стоимость технического обслуживания ТС за время T имеет вид:

$$R_T(\tau) = \sum_{j=1}^{M} c_1 N_j(\tau) + c_2 M,$$

где $N_j(\tau)$ — число отказов на интервале $[(j-1)\tau, j\tau]$. Считаем, что в момент предупредительной замены ТС полностью восстанавливается, поэтому согласно закону больших чисел стоимость обслуживания в единицу времени за достаточно долгое время близка к значению:

$$r^*(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{R_T(\tau)}{T} = \frac{c_1}{\tau}\left\{\frac{\mu\alpha}{(\alpha-\beta)^2} e^{(\alpha-\beta)\tau} - \frac{\mu\alpha + \mu\beta\tau(\alpha-\beta)}{(\alpha-\beta)^2}\right\} + \frac{c_2}{\tau}.$$

Нетрудно доказать, что функция $r^*(\tau)$ имеет единственный минимум. Проводя минимизацию $r^*(\tau)$ по τ, стандартными методами получим оптимальный период проведения предупредительных замен.

В случае $\alpha = \beta$ получаем функцию:

$$r^*(\tau) = c_1\mu + \frac{1}{2} c_1\mu\beta\tau + \frac{c_2}{\tau},$$

минимум которой достигается при

$$\tau_0 = \sqrt{\frac{2c_2}{c_1\mu\beta}}$$

и равен

$$r^*(\tau_0) = c_1\mu + \sqrt{2c_1c_2\mu\beta}.$$

Заметим, что вместо стоимости $R_T(\tau)$ можно взять любой показатель надежности функционирования ТС, либо рассмотреть задачу минимизации $r^*(\tau)$ при ограничениях на показатели надежности.

Следующим шагом после выбора модели функционирования является задача идентификации — оценки параметров модели. Это самостоятельная задача и здесь не будет рассматривать. В модели предполагалось убывание интенсивности отказов со временем, что соответствует приработке элементов. В некоторых ТС такое предположение не разумно и следует считать, что после восстановления отказавшего элемента интенсивность резко падает, а затем в силу старения элемента — растет. Такой моделью точечного процесса является самоуправляемый процесс (self — correcting), введенный Ве-Джонсом, интенсивность которого

$$\lambda(t) = \exp\{\alpha + \beta t - \gamma N(0, t)\},$$

где $N(0, t)$ — число событий на интервале $[0, t]$. Если параметры $\beta > 0$, $\gamma > 0$, то процесс асимптотически стационарный. При $\gamma = 0$ получаем неоднородный процесс Пуассона, а при $\gamma > 0$, $\beta \leqslant 0$ — точечный процесс с конечным с вероятностью 1 числом событий на $[0, \infty)$. В зависимости от вида ТС можно выбирать ту или иную модель этого процесса и, как в предыдущем примере, после вычисления $E\lambda(t)$ рассчитывать оптимальный период проведения предупредительных замен.

Выше принималось $k = 1$. Теперь рассмотрим задачу описания функционирования системы, состоящей из k связанных между собой элементов в терминах процессов со взаимным возбуждением. Интенсивность отказов i-го элемента зададим по формуле.

$$\lambda^{(i)}(t) = \nu_i + \sum_{j=1}^{k} \int_0^t g_{ij}(t - \tau)\, dN^{(j)}(\tau).$$

Влияние процессов друг на друга определяется функцией $g_{ij}(t)$. Изучение этой системы аналогично проведенному выше. В частности, пусть $k = 2$ и функции $g_{ij}(t) = \alpha_{ij} e^{-\beta t}$, $t \geq 0$. Тогда для $E\lambda^{(1)}(t)$ и $E\lambda^{(2)}(t)$ выписывается система дифференциальных уравнений. Обозначим корни уравнения ν_1 и ν_2:

$$\nu^2 - (\alpha_{11} + \alpha_{22})\nu + \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21} = 0.$$

Тогда, если $\beta \neq \nu_1$ и $\beta \neq \nu_2$, то решение этой системы имеет вид:

$$E\lambda^{(i)}(t) = b_{1i} e^{(\nu_1 - \beta)t} + b_{2i} e^{(\nu_2 - \beta)t} + b_{3i} t^r, \tag{5}$$

где $r = 0$, а постоянные b_{1i}, b_{2i}, b_{3i} явно выписываются. В случае $\beta = \nu_1$ или $\beta = \nu_2$, но $\nu_1 \neq \nu_2$, в (5) имеем $r = 1$ и другие постоянные b. И, наконец, при $\beta = \nu_1 = \nu_2$ имеем $r = 2$.

С помощью (5), как и в одномерном случае, выписывается стоимость технического обслуживания ТС за время T, которая затем минимизируется по периодам предупредительных замен каждого элемента.

ЕГУ 30.IV.1983

Ս. Ս. ԱՎԵՏԻՍՅԱՆ, ՅՈՒ. Ա. ԿՈՒՏՈՅԱՆՑ

ՆԱԽԱԶԳՈՒՇԱԿԱՆ ՍՊԱՍԱՐԿՄԱՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐՈՒՄ ԿԵՏԱՅԻՆ ՊՐՈՑԵՍՆԵՐԻ ՈՐՈՇ ՄՈԴԵԼՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Առաջարկվում են տեխնիկական համակարգերի աշխատանքը նկարագրող մաթեմատիկական մոդելներ, որոնք հաշվի են առնում մերժերի վիճակագրական ազդեցությունը համակարգի հետագա աշխատանքի վրա։ Համաձայն այդ մոդելների որոշվում են նախազգուշացնող փոխարինումների անցկացման օպտիմալ պարբերությունը։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Lipiser R. S., Shiryayev A. N.* Statistics of Random Processes. Applications.— Berlin: Springer—Verlag, v. 2, 1978.— 339.
2. *Ogata Y.* The Asymptotic Behaviour of Maximum Likelihood Estimators for Stationary Point Processes. — Annals of the Institute of statistical Mathematics, 1978, v. 39, № 2, A, p. 243—261.
3. *Кутоянц Ю. А.* Локальная асимптотическая нормальность для процессов пуассоновского типа.— Изв. АН АрмССР, Математика, 1979, т. XIV, 1, с. 3—20.
4. *Кабанов Ю. М., Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н.* Слабая и сильная сходимость распределений считающих процессов.— Теория вероятностей и ее применение, 1983, т. XXVIII, в. 2, с. 288—319.
5. *Барлоу Р., Прошан Ф.* Математическая теория надежности.— М.: Сов. радио, 1969.— 488 с.
6. *Hawkes. Q. G.* Spectra of Some Self-Exciting and Mutually-Exciting Point Processes. — Biometrica, 1971, v. 58, p. 83—90.
7. *Игнатов В. А., Маньшин Г. Г., Трайнев В. А.* Статистическая оптимизация качества функционирования электронных систем.— М.: Энергия, 1974.— 264 с.