

ЭЛЕКТРОТЕХНИКА

Т. М. НЭМЕНИ, С. М. ОВСЕЯНИ

К РАСЧЕТУ КОЭФФИЦИЕНТОВ УВЕЛИЧЕНИЯ АКТИВНОГО  
 И РЕАКТИВНОГО СОПРОТИВЛЕНИЙ КРУГЛОГО СТЕРЖНЯ  
 ДЕМПФЕРНОЙ ОБМОТКИ РОТОРА

При проектировании крупных электрических машин весьма важным является точное определение действительных значений сопротивления стержней демпферных обмоток, располагаемых в пазах полюсных наконечников ротора.

Обычно полюсные наконечники крупных машин выполняются шихтованными, из толстых (2...3 мм и более) стальных пластин, либо массивными, из сплошных поковок и стального литья. В обоих случаях электромагнитные процессы, возникающие в стержнях при протекании по ним рабочих токов в различных режимах нагрузки, аналогичны. В результате этих процессов имеет место изменение активного и реактивного сопротивлений стержней, которое оценивается коэффициентами  $k_a$  и  $k_r$ . Величина этих коэффициентов существенно влияет на характеристики электрической машины: пусковой ток, пусковой момент, нагрев демпферной обмотки и др. Поэтому представляет практический интерес аналитическое определение коэффициентов  $k_a$  и  $k_r$  для случая круглого медного стержня, расположенного в закрытом пазу.

Будем считать, что напряженность магнитного поля в воздушном зазоре машины распределяется вдоль дуги полюса по синусоидальному закону. Тогда составляющая напряженности магнитного поля по оси  $x$  (рис. 1) будет равна:

$$H_x = H_0 \sin \frac{\pi}{\tau} y.$$

Полагая, что на граничной прямой  $ab$  поверхности полюса задано значение  $E_z = E_{z0}$  и что на дуге  $bc$  радиусом  $R = r_0 + (2.5 \dots 3) \Delta_z$  поле не искажается из-за наличия стержня, процесс распространения плоской электромагнитной волны в теле полюса можно считать, затухающей по экспоненте, где  $\Delta_z$  — глубина проникновения этой волны в сталь.

В цилиндрических координатах  $r, \varphi, z$  для плоскопараллельной задачи в области, занимаемой стержнем, справедливо уравнение:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \varphi^2} = j\omega \mu_0 \gamma_0 E_z, \quad (1)$$

где  $\mu_0, \gamma_0$  — магнитная проницаемость и электрическая проводимость меди. То же имеет место и для области, заполненной сталью, если в правой части уравнения (1)  $\mu_0 \gamma_0$  заменить на  $\mu_1$  — магнитную проницаемость и электрическую проводимость стали.

Решение этого уравнения для области стержня (индекс 1) задается в виде тригонометрического ряда:

$$E_{z1} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n J_n(\omega) \cos n\varphi, \quad (2)$$

где  $J_n(\omega)$  — функция Бесселя первого рода, а  $\omega = \sqrt{-j\omega\mu_0\gamma_0} r$ .

Для области стали (индекс 2), соответственно:

$$E_{z2} = \sum_{n=0}^{\infty} (B_n J_n(\omega_1) + C_n H_n(\omega_1)) \cos n\varphi, \quad (3)$$

где  $\omega_1 = \sqrt{-j\omega\mu_1\gamma_1} r$ ;  $H_n$  — вторая цилиндрическая функция третьего рода (функция Ганкеля).

Исходя из условия непрерывности поля на границе раздела двух сред (стержень — сталь), тангенциальные составляющие электрической и магнитной напряженности поля должны быть равны:

$$E_{z1 \text{ гр}} = E_{z2 \text{ гр}}: \quad \frac{\partial E_{z1}}{\mu_0 \partial r} \Big|_{\text{гр}} = \frac{\partial E_{z2}}{\mu \partial r} \Big|_{\text{гр}}$$

Из первого граничного условия следует:

$$A_n J_n(\omega_0) = B_n J_n(\omega_{10}) + C_n H_n(\omega_{10}), \quad (4)$$

где  $\omega_0 = \sqrt{-j\omega\mu_0\gamma_0} r_0$ ;  $\omega_{10} = \sqrt{-j\omega\mu_1\gamma_1} r_0$ ;  $r_0$  — радиус стержня, а во втором —

$$A_n J_n(\omega_0) = \gamma_1 (B_n J_n(\omega_{10}) + C_n H_n(\omega_{10})), \quad (5)$$

где

$$\gamma_1 = \sqrt{\frac{\gamma_1 \mu_0}{\mu_1 \gamma_0}}$$

Определяя из (4) значение  $A_n$  и подставляя в (5), после преобразования для  $E_{z2}$  получим:

$$E_{z2} = \sum_{n=0}^{\infty} M_n \frac{J_n(\omega_1)}{J_n(\omega_{12})} \frac{1 - C_{1n} \frac{J_n(\omega_{10})}{J_n(\omega_1)} \frac{H_n(\omega_1)}{H_n(\omega_{10})}}{1 - C_{1n} \frac{J_n(\omega_{10})}{J_n(\omega_{12})} \frac{H_n(\omega_{12})}{H_n(\omega_{10})}} \cos n\varphi, \quad (6)$$

где  $\omega_{12} = \sqrt{-j\omega\mu_1\gamma_1} r_2$ .

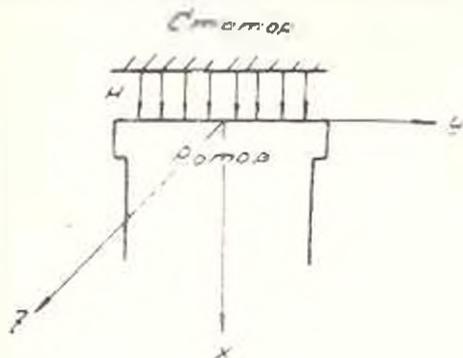


Рис. 1. Распределение напряженности магнитного поля в зазоре.

Из (3) и (6) находим:

$$B_n = \frac{M_n}{J_n(\omega_{12}) \left\{ 1 - C_{1n} \frac{J_n(\omega_{10})}{J_n(\omega_{12})} \cdot \frac{H_n(\omega_{12})}{H_n(\omega_{10})} \right\}}$$

Анализ показывает, что в выражении для  $B_n$  вторым слагаемым знаменателя можно пренебречь. Тогда:

$$B_n \approx \frac{M_n}{J_n(\omega_{12})}. \quad (7)$$

С учетом (7), для  $A_n$  из (4) получим:

$$A_n = M_n \frac{J_n(\omega_{10})}{J_n(\omega_{12})} \cdot \frac{1}{J_n(\omega_0)} (1 - C_{1n}),$$

где

$$1 - C_{1n} = \gamma_1 \frac{\frac{J_n(\omega_{10})}{J_n(\omega_0)} - \frac{H_n(\omega_{10})}{H_n(\omega_0)}}{\frac{J_n(\omega_{10})}{J_n(\omega_0)} - \gamma_1 \frac{H_n(\omega_{10})}{H_n(\omega_0)}}.$$

Поскольку  $\gamma_1$  весьма малая величина, вторым слагаемым знаменателя последнего выражения можно пренебречь. Тогда:

$$A_n \approx M_n \frac{J_n(\omega_{10})}{J_n(\omega_{12})} \cdot \frac{\gamma_1 \left\{ \frac{J_n(\omega_{10})}{J_n(\omega_0)} - \frac{H_n(\omega_{10})}{H_n(\omega_0)} \right\}}{J_n(\omega_0)}.$$

а отношение:

$$\frac{A_n}{A_0} = \frac{M_n}{M_0} S_n \frac{J_n(\omega_0)}{J_n(\omega_0)}. \quad (8)$$

где

$$S_n = \frac{J_n(\omega_{10}) J_0(\omega_{12})}{J_n(\omega_{12}) J_0(\omega_{10})} \cdot \frac{\frac{J_n(\omega_{10})}{J_0(\omega_{12})} - \frac{H_n(\omega_{10})}{H_0(\omega_{12})}}{\frac{J_n(\omega_{10})}{J_0(\omega_{10})} - \frac{H_n(\omega_{10})}{H_0(\omega_{10})}}. \quad (9)$$

Выражение для полного комплексного сопротивления стержня может быть найдено с помощью вектора Умова—Пойтинга по формуле [1]:

$$z_c = r_c + jx_c = \frac{2r_0 l \int_0^l E_{z1}(\omega_0) H_{z1}^*(\omega_0) d\varphi}{|I|^2}, \quad (10)$$

где (\*) обозначает сопряженный комплекс,  $al$  — длина стержня. Согласно закону полного тока можно записать:

$$l = 2r_0 \int_0^{\pi} H_{\theta}(\omega_0) d\varphi.$$

Относя  $z_c$  к сопротивлению стержня при постоянном токе, получим:

$$R_0 = \frac{l}{\gamma_0 \pi r_0^2 \tau}$$

$$\frac{r_c}{R_0} + j \frac{x_c}{R_0} = k, \quad -jk_c =$$

$$= e^{-j\frac{x_c}{R_0}} x_0 \left\{ \frac{J_0(\omega_0)}{2J_1(\omega_0)} - \frac{1}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{|M_n|}{|M_0|} \cdot |S_n| \right)^2 \cdot \frac{J_n(\omega_0)}{J_n(\omega_0)} \right\}. \quad (11)$$

где  $x_0 = \frac{\sqrt{2} r_0}{\Delta_1}$ ;  $\Delta_1$  — глубина проникновения электромагнитной волны в медь.

Таким образом, если известны коэффициенты  $M_n$ , то выражение (11) позволяет найти значения коэффициентов  $k_1$  и  $k_2$ . Наиболее удобным для вычисления цилиндрических функций Бесселя  $J_n$  и Ганкеля  $H_n$  в данном случае является вычисление через их интегральные представления. Вычисление определенных интегралов по этим формулам выполнено на ЭВМ «Найри-К».

Для определения  $M_n$  следует учесть, что при реальных значениях  $\omega_0$  и  $\omega_1$  выражение

$$1 - C_{1n} \frac{J_n(\omega_{10})}{J_n(\omega_1)} \frac{H_n(\omega_1)}{H_n(\omega_{10})}$$

мало отличается от единицы. Поэтому с достаточной точностью можно принять равным единице аналогичное выражение и в знаменателе (6). С учетом этих приближений получим:

$$E_n \approx \sum_{n=0}^{\infty} M_n \frac{J_n\left(\sqrt{1-j} \frac{\sqrt{2} r}{\Delta_1}\right)}{J_n\left(\sqrt{1-j} \frac{\sqrt{2} r_1}{\Delta_1}\right)} \cos n\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} M_n q_n \cos n\varphi. \quad (12)$$

В соответствии с краевыми условиями задачи необходимо, чтобы эта сумма на верхней граничной прямой  $ab$  (при  $r \cos \varphi = h$  — рис. 2) обращалась в постоянную величину, например, в единицу. На дуге граничной окружности  $bc$  (при  $r = r_1 = \text{const}$ )  $E_z$  затухает по экспоненте с показателем  $\frac{x}{\Delta_2}$ . Для упрощения задачи примем, что при  $r = r_1$  на половине глубины проникновения  $E_z = 1$ , а на остальной части граничной дуги (на дуге  $b'c$ )  $E_z = 0$ .



Тогда в функции угла  $\varphi$  граничные условия  $E_{z,r}(\varphi)$  будут выглядеть, как это показано на рис. 3. Из рис. 2 следует:

$$\cos \varphi_2 = \frac{h}{r_2}; \quad \cos \varphi_1 = \frac{h - \frac{\Delta_2}{2}}{r_2}$$

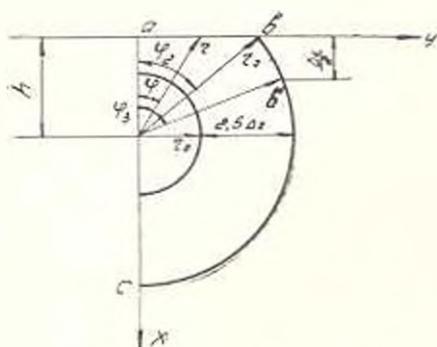


Рис. 2. К определению коэффициентов ряда  $M_n$ .

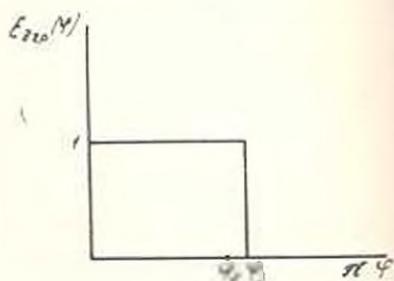


Рис. 3. Зависимость электрической напряженности поля от угла  $\varphi$ .

Отношение  $q_n = \frac{J_n(\sqrt{-j} x_1)}{J_n(\sqrt{-j} x_{12})}$ , где  $x_1 = \frac{\sqrt{2} r}{\Delta_2}$ ,  $x_{12} = \frac{\sqrt{2} r_0}{\Delta_2}$ ,

в функции  $x_1$  для младших номеров  $n$  ( $n = 1 \dots 5$ ) дает приблизительно одну и ту же величину. Таким образом, если считать, что ряд (4) сходится и поведение решения определяется первыми гармониками, то вместо (12) можно написать:

$$E_{z,r} \approx \sum_{n=0}^{\infty} M_n q(x_1) \cos n\varphi = q(x_1) \sum_{n=0}^{\infty} M_n \cos n\varphi, \quad (13)$$

где  $q(x_1) = q\left(\sqrt{-j} \frac{\sqrt{2} r}{\Delta_2}\right) = q\left(1 - j \frac{\sqrt{2} H}{\Delta_2 \cos \varphi}\right)$ , которая при  $0 \leq$

$\varphi \leq \varphi_2$  равна  $q = q_0 \approx \frac{J_0(\sqrt{-j} x_1)}{J_0(\sqrt{-j} x_{12})}$ , а при  $\varphi_2 \leq \varphi \leq \varphi_1 - q = 1$ ,

поскольку при  $\varphi_2 \leq \varphi \leq \varphi_1$   $r = r_2$ .

При этих условиях на участке  $bc$  должно обеспечиваться равенство:

$$\sum_{n=0}^{\infty} M_n \cos n\varphi = \frac{E_{z,r}(\varphi)}{q(\varphi)}, \quad (14)$$

и коэффициенты ряда определяются как коэффициенты разложения функции  $\frac{E_{z,r}(\varphi)}{q(\varphi)}$  в ряд Фурье по косинусам:

$$M_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\varphi_1} \frac{E_{z,r}(\varphi)}{q(\varphi)} \cos n\varphi d\varphi.$$

Учитывая вид функции  $E_{z \text{ гр}}(\varphi)$  и свойства функции  $q(\varphi)$ , вместо этого интеграла можно написать:

$$M_n = \frac{2}{\pi} \left( \int_0^{\pi} \frac{\cos n\varphi}{q(\varphi)} d\varphi + \int_{-\pi}^0 \cos n\varphi d\varphi \right). \quad (15)$$

Таким образом, вычисляя с учетом (11) коэффициенты  $M_n$  по (15), определим искомые коэффициенты  $k$ , и  $k_r$ .

Երևի մ. Կ. Մարքս

26 XI 1981

Տ. Մ. ԱՄԻՆԻ, Ս. Մ. ՀՈՎՍԵՓՅԱՆ

**ՌՈՏՈՐԻ ՀԱՆԿԱՐՏԻՉ ՓԱԹՈՒՅԹԻ ԿՈՐ ՉՈՂԻ ԱՆՏՐՎ ԵՎ ԹԵԱԿՏԻՎ ԴԻՄԱԿՐՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՄԵԾԱՅՄԱՆ ԳՈՐԾԱԿԻՑՆԵՐԻ ՀԱՇՎԱՐԿԻ ՎՐԱԲԵՐՅԱԼ**

Ա մ փ ո փ ու մ

Կատարված է էլեկտրամագնիսական դաշտի հաշվարկը ձողում և նրա հարևան սեղամասի հոծ բևեռում աչն դեպքի համար, երբ ձողը դառնում է փակ կապ իտրակում:

Անալիտիկորեն (փոփոխականների բաժանման մեթոդով) ալգորիտի ձողի ակտիվ և անակտիվ դիմադրությունների մեծացման գործակիցների որոշման համար ստացված են համապատասխան արտահայտություններ:

**Л И Т Е Р А Т У Р А**

1. Петушина А. В., Подиванов К. М. Основы электротехники. — М.—Л.: Гычарտրոизատ, 1956, ч. III — 256 с.