

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА

В. К. БРУТЯН

СИНТЕЗ НЕЛИНЕЙНЫХ МАРКОВСКИХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ СТАТИСТИЧЕСКОЙ АППРОКСИМАЦИИ

1. *Введение.* Проблема синтеза нелинейных марковских управляемых систем (МУС) исследована незначительно [1, 2]. Общий метод, применяемый в этих случаях, заключается в разложении нелинейной функции в окрестности номинального значения в ряд Тейлора, в котором затем берется несколько первых членов [3, 4]. Такой подход, как показано ниже, требует решения нелинейной детерминированной задачи, что связано с известными трудностями. За исключением случая, когда случайные возмущения малы, этот метод не дает удовлетворительных результатов.

В настоящей статье для синтеза нелинейных МУС, подверженных большому возмущению, используется метод статистической линеаризации с целью построения линейной эквивалентной системы с переменными параметрами. Задача синтеза нелинейных МУС расчленяется на две, связанные между собой, задачи. Предлагается алгоритм последовательного приближения для синтеза субоптимального закона управления. На конкретном примере иллюстрируется применение полученных результатов.

2. *Постановка задачи.* Рассматривается непрерывная МУС, описываемая уравнением

$$dx(t, \omega) = \psi[x(t, \omega)] dt + D(t)u(t, \omega) dt + G(t)d\tilde{z}(t, \omega), \quad (1)$$
$$x(t_0, \omega) = x_0(\omega).$$

Здесь $x(t, \omega)$ — n -мерный вектор состояния; $u(t, \omega)$ — r -мерный вектор управления; $\tilde{z}(t, \omega)$ — n -мерный винеровский процесс с числовыми характеристиками:

$$M\{d\tilde{z}(t, \omega)\} = 0; \quad M\{d\tilde{z}'(t_1, \omega) \cdot d\tilde{z}(t_2, \omega)\} = S_{\tilde{z}}(t) \delta(t_2 - t_1),$$

где $S_{\tilde{z}}(t)$ — интенсивность процесса $\tilde{z}(t, \omega)$; $\delta(\cdot)$ — дельта функция Дирака; ω — элемент пространства случайных событий Ω .

Начальное значение $x_0(\omega)$ предполагается нормальной случайной величиной, не зависящей от процесса $\tilde{z}(t, \omega)$, с известными характеристиками $M\{x_0(\omega)\} = 0$, $M\{x_0'(\omega) x_0(\omega)\} = I_0$, где I_0 — положительно определенная матрица. Вектор-функция $\psi[x(t, \omega)]$ является нелиней-

ной и предполагается, что ее компоненты удовлетворяют равномерному условию Липшица по переменной x и имеют ограничения, т. е. решение уравнения (1) в смысле Ито существует [5, 6].

Требуется найти управление вида

$$u(t) = u[x(t, \omega)], \quad (2)$$

т. е. управление, осуществляемое при помощи обратной связи, которое переводит МУС (1) из $x_0(\omega)$ в $x_T(\omega)$ и минимизирует функционал качества

$$\begin{aligned} J = M\{L[x(t, \omega), u(t, \omega)]\} &= \frac{1}{2} M\{x'_T(\omega) \Gamma_T x_T(\omega) + \\ &+ \int_0^T [x'(t, \omega) B(t) x(t, \omega) + u'(t, \omega) E(t) u(t, \omega)] dt\} = \\ &= \int_{R^n} L[x(t, \omega), u(t, \omega)] f_n(x(t, \omega)) dx(t, \omega), \end{aligned} \quad (3)$$

где L — положительно полуопределенная функция $x(t, \omega)$; Γ_T , B и E — $n \times n$ -, $n \times n$ - и $r \times r$ -мерные ограниченные и непрерывные матрицы, причем элементы этих матриц не зависят от $x(t, \omega)$ и $u(t, \omega)$ ($\Gamma_T \geq 0$, $B \geq 0$, $E > 0$).

К классу допустимых управлений относятся такие, в которых марковский процесс $x(t, \omega)$, определяемый уравнениями (1), (2), имеет однозначную функцию плотности распределения вероятностей $f_n(x(t, \omega))$.

3. Обсуждение задачи. Для нелинейных МУС в литературе применяется разложение функции $\psi(x + \Delta x)$ в ряд Тейлора в окрестности номинальной траектории $\bar{x}(t)$, которое приводит к уравнениям

$$\dot{\bar{x}}(t) = \psi(\bar{x}(t)) + D(t)\bar{u}(t),$$

$$d\Delta x(t, \omega) = \left[\frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{\bar{x}} \Delta x(t, \omega) + D(t) \Delta u(t, \omega) \right] dt + G(t) d\bar{z}(t, \omega).$$

Это верно в предположении, что приращение $\Delta x(t, \omega)$ имеет малую вероятностную норму и можно пренебречь членами высших порядков. Если $\Delta x(t, \omega)$ велико, то линеаризация уравнения для приращений, проводимая выше, весьма неудовлетворительна, т. к. операция дифференцирования, связанная с подобным разложением, усиливает влияние шума. В такой ситуации определенные результаты даст метод статистической линеаризации [7].

Для приближенного построения линейной эквивалентной системы методом статистической линеаризации необходимо функцию $\psi[x(t, \omega)]$ представить в виде

$$\psi[x(t, \omega)] = A_0(t) + A_1(t) \Delta x(t, \omega) + e(t, \omega),$$

где $\Delta x(t, \omega) = x(t, \omega) - \bar{x}(t)$ — приращение состояния; $e(t, \omega)$ — ошибка аппроксимации.

Коэффициенты разложения $A_0(t)$ и $A_1(t)$ определяются так, чтобы математическое ожидание квадрата ошибки $e(t)$, т. е. $M\{e^2(t, \omega)\}$, было минимальным по отношению к выбору $A_0(t)$ и $A_1(t)$. Применение методов вариационного исчисления к решению этой задачи дает для $\min M\{e^2(t, \omega)\}$ следующие необходимые и достаточные условия:

$$A_0(t) = M\{\psi[x(t, \omega)]\}; \quad A_1(t) = M\{\Delta x'(t, \omega) \Delta x(t, \omega)\}^{-1} R(t).$$

Следует заметить, что из-за нелинейности распределение случайного процесса $x(t, \omega)$ не является нормальным. Однако можно предположить, что при интегрировании нелинейной функции управляемой системы обеспечивается достаточная фильтрация и процесс $x(t, \omega)$, определяемый уравнением (1) для некоторого управления $u(t, \omega)$, является близким к нормальному с математическим ожиданием $\bar{x}(t) = M\{x(t, \omega)\}$ и дисперсией $R(t)$ ошибки состояния [3]. Поскольку ниже закон управления предполагается линейной, то вектор управления также близок к нормальному процессу с математическим ожиданием $\bar{u}(t) = M\{u(t, \omega)\}$. Это значит, что для $\Delta x(t, \omega)$ справедливо выражение

$$\Delta x(t, \omega), R(t) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} |R(t)|^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \Delta x'(t, \omega) R^{-1}(t) \Delta x(t, \omega)\right\}.$$

С помощью плотности распределения вероятностей и исходной системы (1) можно получить эквивалентные уравнения

$$\bar{\psi}(\bar{x}, \bar{u}, R) = 0, \quad (4)$$

$$d\Delta x = [A(\bar{x}, \bar{u}, R) \Delta x + D(\bar{x}, \bar{u}, R) \Delta u] dt + G dz, \quad (5)$$

где Δu является приращением управления, т. е.

$$\Delta u(t, \omega) = u(t, \omega) - \bar{u}(t). \quad (6)$$

Таким образом, решение стохастического уравнения (1), которое является марковским процессом в n -мерном евклидовом пространстве состояний R^n , можно рассматривать как результат возмущения детерминированной траектории $\bar{x}(t)$ случайным процессом $\bar{z}(t)$. Детерминированная траектория является решением уравнения

$$\dot{\bar{x}}(t) = A(\bar{x}, \bar{u}, R) \bar{x}(t) + D(\bar{x}, \bar{u}, R) \bar{u}(t), \quad \bar{x}(t_0) = \bar{x}_0. \quad (7)$$

Для линейного марковского процесса $x(t, \omega)$, если существует закон управления

$$u(t, \omega) = -E^{-1}(t) D'(t) \Gamma(t) x(t, \omega) = -C(t) x(t, \omega), \quad (8)$$

где матрица усиления $\Gamma(t)$ удовлетворяет, в свою очередь, уравнению

$$-\dot{\Gamma}(t) = A'(t)\Gamma(t) + \Gamma(t)A(t) - \Gamma(t)D(t)E^{-1}(t)D'(t)\Gamma(t) + B(t),$$

$$\Gamma(T) = \Gamma_r, \quad (8)$$

найти его приращение чрезвычайно трудно. Поэтому далее будет нарываться лишь субоптимальный закон управления [8].

Подставляя в (3) приращенные значения переменных и вычитая из нового значения функционала выражение (3), получим:

$$\Delta J = M \left\{ \Delta x_i^*(\omega) \Gamma_r \Delta x_i(\omega) + \int_0^T (\Delta x' B \Delta x + \Delta u' E \Delta u) dt \right\}. \quad (10)$$

при этом учитывалось, что $M\{\Delta x\} = M\{\Delta u\} = M\{d\dot{x}\} = 0$.

Система (5) является уравнением для приращений, а выражение (10) — приращением функционала качества. Очевидно, что закон управления для МУС (1) связан с законом управлением для (7) и (5) соотношением

$$u^*(t) = \bar{u}^*(t) + \Delta u^*(t). \quad (11)$$

Первый член в правой части этого равенства известен из детерминированной теории оптимального управления [2, 5]. Точнее, он равен

$$\bar{u}^*(t) = -C(t)\bar{x}^*(t),$$

где $\bar{x}^*(t)$ — решение уравнения (7) с условием $\bar{u}(t) = \bar{u}^*(t)$.

Второй член можно получить, решив задачу оптимизации в приращениях по функционалу (10). Приращения Δx и Δu находятся, исходя из требования о минимальности математического ожидания квадрата ошибки между нелинейной функцией и ее линейной эквивалентной моделью (5). Это условие записывается в виде

$$\int \int_{R^* R'} \{\psi_i(\bar{x} + \Delta x, \bar{u} + \Delta u) - [A_i D_i][\Delta x \Delta u]\}^2 f(\Delta x, \Delta u, R_0) d[\Delta x \Delta u] \rightarrow \min,$$

$$i = 1, \dots, n,$$

где $R_0 = \begin{bmatrix} R & -RC' \\ -CR & CRC' \end{bmatrix}$, а матрица R определяется как решение матричного уравнения дисперсии

$$\dot{R}(t) = [A(t) - D(t)C(t)]R(t) + R(t)[A(t) + D(t)C(t)]' +$$

$$+ G(t)S_{\Sigma}(t)G'(t), \quad (12)$$

где A_i , D_i — векторы-строки матриц A , D и представляют собой эквивалентные приращения, которые заменяют нелинейную скалярную функцию $\psi_i(\bar{x} + \Delta x, \bar{u} + \Delta u)$ ($i = 1, \dots, n$).

Решение $[A_i D_i]$, если R_a^{-1} существует, имеет вид:

$$\begin{bmatrix} A_i \\ D_i \end{bmatrix} = R_a^{-1} \left\{ \int \int_{R^n R^r} [\Delta x \Delta u] \psi_i(\bar{x} + \Delta x, \bar{u} + \Delta u) f(\Delta x, \Delta u, R_a) d[\Delta x \Delta u], \right. \\ \left. (i = 1, \dots, n). \right. \quad (13)$$

Теперь задача синтеза расчленяется на две.

Задача 1. Для заданной матрицы R_a и при ограничениях (4) необходимо найти такое управление $\bar{u}(t)$, чтобы минимизировать функционал

$$J = \bar{J} + \Delta J,$$

где

$$\bar{J} = \frac{1}{2} \left\{ \bar{x}_T' F_T \bar{x}_T + \int_0^T (\bar{x}' B \bar{x} + \bar{u}' E \bar{u}) dt \right\},$$

а ΔJ определяется выражением (10).

Задача 2. При фиксированных значениях $\bar{x}^*$, $\bar{u}^*$, $\bar{x}_T^*$ и ограничениях вида (5) необходимо найти коэффициент обратной связи $C^*(t)$, а значит, Δx^* и R_a^* , чтобы минимизировать функционал (10).

Эти задачи связаны между собой и поэтому требуется найти такое совместное множество $\{\bar{x}^*, \bar{u}^*, C^*, R_a^*\}$, при котором они решаются одновременно.

4. **Алгоритм приближенного решения задачи.** Алгоритм последовательного приближения для вычисления множества $\{\bar{x}^*, \bar{u}^*, C, R_a^*\}$ можно представить с помощью нижеописанных итерационных циклов:

а) выбираются произвольные положительно определенные начальные матрицы R^0 , C^0 и формулируется матрица R_a^0 ;

б) минимизируется функционал $\bar{J}$ при ограничении (4). Это требует решения системы нелинейных уравнений (9) с применением полной численной оптимизации. В результате вычисляются значения $\bar{x}^0$, $\bar{u}^0$;

в) производится оценка A^0 , D^0 с использованием ранее рассчитанных $\bar{x}^0$, $\bar{u}^0$ и R_a^0 ;

г) вычисляется матрица управления C^1 в результате решения уравнений (8), (9), где всюду используется нулевой верхний индекс;

д) вычисляется матрица R^1 , как решение уравнения (12): $(A^0 - D^0 C^1) R^1 + R^1 (A^0 - D^0 C^1)' + \partial S_{11} G' = 0$ и формулируется матрица R_a^1 ;

е) процесс б) — д) продолжается до тех пор, пока разности между матрицами A^1 , A^0 и D^1 , D^0 , полученными на последовательных приближениях итерации, не будут превышать по модулю заданную степень точности.

5. **Пример.** Нелинейная МУС третьего порядка описывается уравнениями:

$$\dot{x}_1 = -4x_1x_2 + 0,1u - 0,01x_1u;$$

$$\dot{x}_2 = -4x_1x_2 + 0,01x_2 - 0,01x_2u;$$

$$\dot{x}_3 = -0,2x_3 + 50\bar{u}.$$

а функционал качества определяется выражением

$$J(x, u) = M \int_0^{40} (0,6x_1^2 + 1,2x_2^2 + 0,1x_3^2 + u^2) dt.$$

При оценке интегралов (13) наличие нелинейностей типа произведения приводит к независимости эквивалентных приращений от R_0 . Вначале вычисляются эквивалентные уравнения. Матрицы A , D и G принимают вид:

$$A = \begin{bmatrix} -(14\bar{x}_2 + 0,01\bar{u}) & -4\bar{x}_1 & 0 \\ -4\bar{x}_2 & -(4\bar{x}_1 + 0,01\bar{u}) & 0,01 \\ 0 & 0 & -0,2 \end{bmatrix};$$

$$D = \begin{bmatrix} 0,1 - 0,01\bar{x}_2 \\ -0,01\bar{x}_2 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 50 \end{bmatrix}.$$

Функционал имеет матрицы

$$B = \begin{bmatrix} 0,6 & 0 & 0 \\ 0 & 1,2 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1 \end{bmatrix} \quad E = 1.$$

На основе полученных результатов, нетрудно заметить, что пара (A^*, D^*) , получаемая исключением 3-го уравнения состояния, является управляемым. Следовательно, уравнения (9) и (13) имеют решения. Так как матрицы A и D не зависят от R_0 , то в качестве начальных матриц можно выбрать значение $R^* = C^* = 0$. Проводя итерацию, сходимость получается на 5-ом этапе и вычисляются следующие конечные значения переменных: $\bar{x}_1^* = 0,1$; $\bar{x}_2^* = 3,6$; $\bar{u}^* = 95$; $C^* = [29,3, 1,5, 0,01]$.

С целью оценки субоптимального закона управления величина функционала качества рассчитывалась для 3-х случаев: 1) синтез в установившемся режиме, когда случайный процесс отсутствует; 2) случайный процесс действует, а управление отсутствует; 3) автоматическая оптимизация осуществляется под действием случайного процесса. В этих трех случаях величина функционала, соответственно, равна 610, 672 и 594. Таким образом, минимальная величина функционала получена в третьем случае.

Данный метод синтеза нелинейных МУС легко применяется и в системах 8-го порядка, когда в уравнениях состояния 14 нелинейно-

стен типа произведения и управление осуществляется скалярной величиной. Для такой МУС величина функционала качества, соответственно, равняется 1412, 1576 и 1403. При введении вектора управления также не возникает затруднений и лишь увеличивается расчетное машинное время, которое для рассматриваемой выше системы 3-го порядка составило 15 с. на машине «Наири-2», а для системы 8-го порядка — 115 с.

Для оценки точности расчетов данного метода синтеза, основанного на статистический линеаризации, проведено моделирование рассмотренной выше МУС 3-го порядка на машине «Наири-2». Интегрирование системы дифференциальных уравнений проводилось обычными способами. Интервал дискретности в 6 раз превышал максимальную постоянную времени МУС. В результате установлено, что расчетные математические ожидания и дисперсии переменных состояния почти точно совпадают с аналогичными величинами, полученными при моделировании МУС на машине «Наири-2». Расхождения не выходят за пределы точности измерений.

Ер. и т. изд. хозяйства

25. 11. 1982

Վ. Կ. ԲՐՈՒՅԱՆ

ՈՉ ԴՅԱՅԻՆ ՄԱՐԿՈՎՅԱՆ ԴՆԿԱՎԱՐՈՒԻ ՀԱՄԱԿԱՐԴԻ ՍԻՆԹԵԶԸ ՎԻՃԱԿԱՍԴՐԱԿԱՆ ԴՅԱՅՆԱՅՄԱՆ ՄԵԹՈԴՈՎ

Ա Վ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Ոչ գծային մարկովյան դեկավարելի համակարգի սինթեզի խնդիրը դիմարկվում է որպես գծայնացման խնդիր: Փոփոխական պարամետրերով համարժեք համակարգ ստանալու նպատակով կիրառվում է վիճակագրական գծայնացման մեթոդը և ոչ գծային մարկովյան դեկավարելի համակարգի ինինվզման խնդիրը բաժանվում է փոփոխարձորեն կապված երկու խնդիրների: Մշակված է մոտավոր հաջորդականության ալգորիթմ՝ սինթեզի այդ խնդիրների լուծման համար: Կոնկրետ օրինակի վրա մեկնաբանված է ստացված արդյունքների կիրառումը:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Моисеев Н. Н. Элементы теории оптимальных систем — М.: Наука, 1975.— 528 с.
2. Гойттенберг Я. Н. Автоматическое управление — М.: Наука, 1978 — 552 с.
3. Брутян В. К. Некоторые вопросы применения марковских процессов к исследованию нелинейных автоматических систем.— Ереван: изд. ЕГУ, 1974.— 198 г.
4. Красовский А. А. Фазовое пространство и статистическая теория динамических систем.— М.: Наука, 1974.— 294 с.
5. Флеминг М., Рашел Р. Оптимальное управление детерминированными и стохастическими системами — М.: Мир, 1978 — 316 с.
6. Острел К. Введение в статистическую теорию управления.— М.: Мир, 1973.— 264 с.
7. Пукачев В. С. и др. Основы статистической теории автоматических систем.— М.: Машиностроение, 1974.— 417 с.
8. Брутян В. К. Об одной задаче синтеза нелинейных марковских систем методом подмножимальной аппроксимации.— Автоматика и телемеханика, 1980, № 7, с. 51—61.