ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Տեխնիկական գիտութ. սերիա XXXV, № 5, 1982 Серия технических наук

МАШИНОСТРОЕНИЕ

В. М. ТАИРЯН

К ИССЛЕДОВАНИЮ КРУГОВЫХ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ

Согласно основной теореме кругового преобразования конформной плоскости [1], всякое круговое преобразование K есть или подобие $П$, или инверсия J, или может быть представлено в виде произведения подобия на инверсию. Математически круговое преобразование может быть представлено в одной из трех форм: $K = П$; $K = J$; $K = ПJ$.

В теории механизмов устройства, осуществляющие преобразование, при котором любые четыре точки, лежащие на окружности, переходят в четыре точки, также лежащие на одной окружности, известны под названием пантографов и инверсоров. Пантографы осуществляют преобразование $K = П$, а остальные две формы преобразования осуществляются с помощью инверсоров. Преобразование по форме $K = J$ осуществляются обобщенным инверсором Поселье-Липкина, а по форме $K = ПJ$ — инверсором Сильвестера-Кемпе. Все разновидности инверсоров с поступательными парами, кроме инверсора Крауфорда и его модификаций, могут быть получены из вышеуказанных инверсоров методом, предложенным в [2]. Путем же сдваивания инверсоров с поступательными парами получаются другие известные схемы (инверсор Перролаца и др.).

Изучение вопроса показывает, что в основу создания каждой кинематической схемы кругового преобразования была заложена та или иная частная геометрическая закономерность, а не геометрическая теория преобразований. Поэтому устройства, осуществляющие подобное преобразование и инверсию, создавались, хотя порою при участии одного и того же изобретателя, но вне связи друг с другом.

В настоящее время, когда эти преобразователи в отдельности достаточно изучены, целесообразно их комплексное исследование. Это позволит выявить новые схемы, а также возможности указанных механизмов, и ответить на ряд вопросов, касающихся их геометрии.

1. Рассмотрим кинематическую цепь с поступательными парами, изображенную на рис. 1, для которой выполняется необходимое для существования круговых преобразователей условие

$$k = r_1/r_2 = l_1/l_2 = e_1/e_2. \tag{1}$$

При обеспечении условия (1), фигуры OAB (OAB') и OCD (OCD') в любом положении подобны и повернуты относительно друг друга на постоянный угол Θ. Расстояния точек B (B') и D (D') от точки O (модули радиус-векторов $\bar{\rho}$) определятся как удаления центров ползунов от центра вращения кривошипа кривошипно-ползунных механизмов, образуемых при закреплении направляющего звена 6:

$$\rho_{B,B'} = \sqrt{e_1^2 + S^2_{B,B'}}; \qquad \rho_{D,D'} = \sqrt{e_2^2 + S^2_{D,D'}}, \tag{2}$$

где

$$S_{B,B'} = r_1\left[\cos\varphi \pm \sqrt{\lambda^2 - (\mu - \sin\varphi)^2}\right];$$

$$S_{D,D'} = r_2\left[\cos\varphi \pm \sqrt{\lambda^2 - (\mu - \sin\varphi)^2}\right];$$

$$\lambda = l_1/r_1 = l_2/r_2; \qquad \mu = e_1/r_1 = e_2/r_2.$$

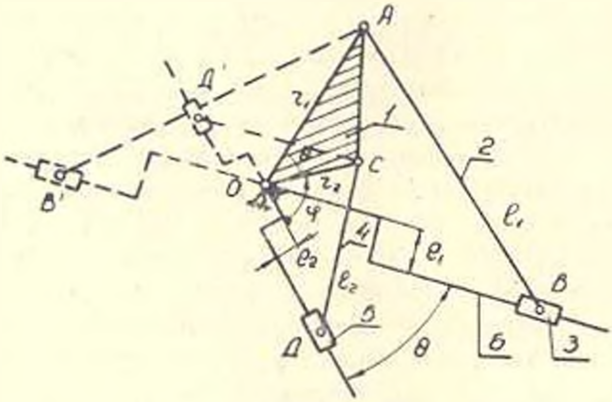

Рис. 1.

Если механизм собран так, что в выражениях для S радикалы берутся с одинаковым знаком, то имеем пантографную схему, в противном случае — инверсорную.

Из (2) при пантографной схеме следует, что

$$\rho_B/\rho_D = \rho_{B'}/\rho_{D'} = r_1/r_2 = k = \text{const}. \tag{3}$$

На основе условия (3) с учетом (2) можно утверждать, что пантографы могут быть с коленным направляющим звеном 6, а также с переменно-пропорциональными длинами звеньев r_1, r_2 и l_1, l_2. В частности, пантографы с переменно-пропорциональными параметрами $r_1 = r_1(\varphi)$ и $r_2 = r_2(\varphi)$ представлены на рис. 2. Пропорциональность переменных радиусов $r_1 = O_3A$ и $r_2 = O_3A'$ (рис. 2а) осуществляется с помощью параллелограмма O_1ACO_2, построенного относительно центра подобного преобразования O_3 по законам построения обобщенного пантографа. На рис. 2б, при условии $e = 0$, построен аналогичный пантограф для значений $\Theta = 0$ и $\Theta = \pi$, который отличается от общеизвестных схем. Напомним, что в известных схемах пантографов и инверсоров [2—5] опорные шарниры собраны в одну точку, совпадающую с центром подобия (или инверсии), т. е. имеют стойку нулевой длины.

Из выражений (2), при инверсорной схеме (рис. 1) имеем:

$$\rho_B \cdot \rho_{D'} = \rho_{B'} \cdot \rho_D = r_1 \cdot r_2 \sqrt{(1-\lambda^2)^2 + 4\mu\,[\mu + (\lambda^2 - 1)\sin\varphi]} \neq \text{const.} \qquad (4)$$

На основе полученного условия (4) можно утверждать, что инверсоры с коленным звеном вообще существовать не могут. При $e=0$ ($\mu=0$) выражение (4) принимает вид

$$\rho_B \cdot \rho_{D'} = \rho_{B'} \cdot \rho_D = r_1 \cdot r_2 (1-\lambda^2). \qquad (5)$$

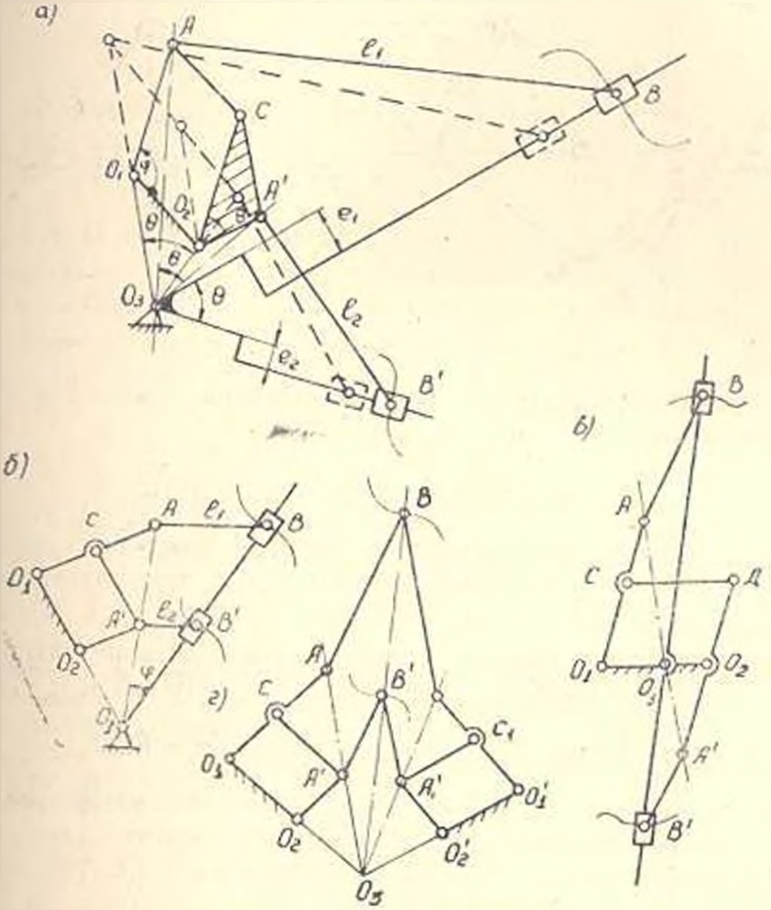

Рис. 2.

При соблюдении условия (1) произведение $r_1 r_2 (1-\lambda^2)$ остается постоянным лишь при постоянных значениях r_1, r_2 и λ, следовательно, существование инверсоров с пропорционально-переменными параметрами также невозможно и поэтому не встречаются инверсоры со стойкой ненулевого измерения.

С учетом (1) выражение (5) окончательно представим в виде:

$$\rho_B \cdot \rho_{D'} = \rho_{B'} \cdot \rho_D = k r_2^2 (1-\lambda^2) = k (r_2^2 - l_2^2) = (r_1^2 - l_1^2)/k. \qquad (6)$$

Сравнивая структурно тождественные схемы пантографов и инверсоров, можно утверждать, что схемы пантографов имеют более «свободную» геометрию, т. е. на их кинематические схемы, кроме основного условия (1), не накладываются другие геометрические ограничения.

2. Из теории круговых преобразований [1] известно, что произведение двух инверсий с коэффициентами i_1, i_2 и с одним и тем же центром O есть гомотетия с центром O и коэффициентом $k_j = i_1/i_2$. При этом, если инверсии одного и того же знака, получаем положительную гомотетию, в противном случае — отрицательную.

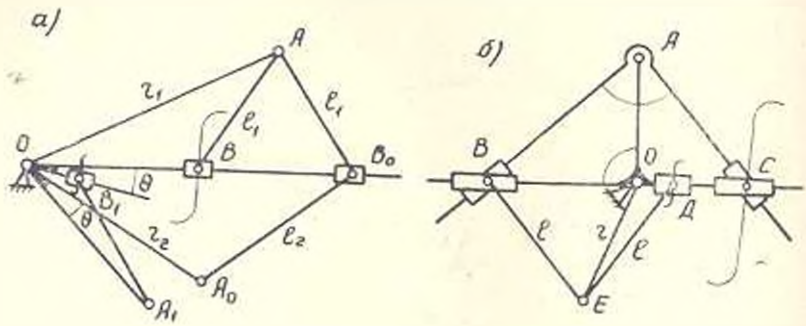

Рис. 3.

На рис. 3а представлена схема механизма, с помощью которого осуществляется преобразование

$$k = J_1 \cdot J_2 \cdot \gamma_1 \cdot \omega = \gamma_j \cdot \gamma_1 \cdot \omega = \gamma \cdot \omega = П, \tag{7}$$

где П — подобное преобразование; J_1 и J_2 — инверсии с центром в точке O; γ_1 и ω — соответственно, гомотетия и поворот относительно центра инверсии, а $\gamma = \gamma_j \cdot \gamma_1$.

Коэффициент подобного преобразования k определяется как произведение двух коэффициентов k_1 и k_j гомотетий γ_1 и $\gamma_j = J_1 \cdot J_2$:

$$k = k_1 \cdot k_j = k_1 \cdot i_1/i_2 = k_1 (r_1^2 - l_1^2)/(r_2^2 - l_2^2). \tag{8}$$

Как видно из (8), при помощи сдваивания двух инверсоров можно осуществить при сравнительно небольших отношениях длин звеньев подобное преобразование с большим коэффициентом k. Так, к примеру, при относительных размерах звеньев: $r_1 = OA = 2$; $l_1 = AB = AB_0 = 1$; $r_2 = OA_0 = 1{,}5$; $l_2 = A_0B_0 = 1{,}457$; $OA_1 = 0{,}75$ и $A_1B_1 = 0{,}728$ имеем $k \approx 48$ ($k_1 = 2$, $i_1 = 3$, $i_2 \approx 0{,}125$).

Схемы пантографов, осуществляющие подобное преобразование с большим k, можно создать также на основе инверсоров Гарта, Поселье-Липкина, механизма Крауфорда и его модификаций. На рис. 3б представлен пантограф на основе инверсора Крауфорда, для которого коэффициент подобного преобразования $k = -k_1 a^2/(r^2 - l^2)$. В этом случае, при $r > l$ имеем отрицательную гомотетию, а при $r < l$ — положительную.

На основе проведенного комплексного исследования пантографов и инверсоров можно сделать следующие выводы.

1. Пантографы и инверсоры составляют единую группу круговых преобразователей, определяемую их структурой.

2. Подгруппы подобных преобразователей и инверсоров в группе круговых преобразователей определяются лишь условием сборки механизма и его геометрией.

ЕрПИ им. К. Маркса 18 V. 1981

Վ. Մ. ԹԱՎՐՅԱՆ

ՇՐՋԱՆԱՅԻՆ ՓՈԽԱԿԵՐՊԻՉՆԵՐԻ ՀԵՏԱԶՈՏՄԱՆ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

Ամփոփում

Շրջանային փոխակերպումների տեսության հիման վրա կատարվում է պանտոգրաֆների և ինվերսորների կոմպլեքսային հետազոտում, որը թույլ է տալիս ի հայտ բերել շրջանային փոխակերպիչների նոր սխեմաներ և պարզաբանել նրանց երկրաչափության հետ առնչվող հարցերը։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Моденов П. С., Пархоменко А. С.* Геометрические преобразования.— М.: изд. МГУ, 1961, с. 218—228.
2. *Артоболевский И. И.* Теория механизмов для воспроизведения плоских кривых.— М.: изд. АН СССР, 1959, с. 22—38.
3. *Рузинов Л. Д.* Проектирование механизмов точными методами.— Л.: Машиностроение, 1972, с. 12—30.
4. *Шамбиров В. А.* Новый метод синтеза пантографов и других трансформирующих механизмов.— В кн.: Тр. инст. Машиноведения. М., т. 17, вып. 67, 1957, с. 5—21.
5. *Дийксман.* Строгое соответствие между новыми и старыми инверсорами.— Тр. Амер. общ. инж.-мех. Конструирование и технология машиностроения, 1971, № 1, с. 176—181.