ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Տեխնիկական գիտութ. սերիա XXXV, № 3, 1982 Серия технических наук

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА

В. Н. НЕРСЕСЯН

АНАЛИЗ НЕЛИНЕЙНЫХ МНОГОСВЯЗНЫХ СИММЕТРИЧНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

Задача исследования нелинейных многосвязных систем (МСАР) связана со значительными трудностями, основной из которых является высокий порядок рассматриваемых уравнений, а также то, что применение метода гармонической линеаризации (МГЛ) [1] для нелинейных МСАР встречает определенные затруднения, поскольку обычно заранее нет оснований предполагать единственность гармонического режима в МСАР.

С другой стороны, многие МСАР, встречающиеся на практике, обладают определенного рода симметрией, которая определяется тем, что МСАР образована из нескольких идентичных одноканальных систем.

В статье предлагается способ исследования нелинейных симметричных МСАР при использовании свойства симметрии, на базе методов гармонической линеаризации и производной аргумента [2].

Пусть

$$\sum_{k=1}^{n} [Q_{ik}(s)\, x_k + P_{ik}(s)\, f_k] = 0, \tag{1}$$

$$f_i = \Phi_i(x_i,\ sx_i), \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$$

является системой дифференциальных уравнений нелинейной МСАР. Здесь $P_{ik}(s)$ и $Q_{ik}(s)$ — многочлены от $s = \frac{d}{dt}$, причем, степень $P_{ik}(s)$ меньше степени $Q_{ik}(s)$. Рассмотрим симметричные нелинейные МСАР с идентичными каналами и симметричными перекрестными связями [3].

Предположим, что в условиях выполнения гипотезы «фильтра» [1], в системе имеется периодическое решение с частотой Ω вида

$$x_i = A_i \sin(\Omega t - \varphi_i). \tag{2}$$

Поскольку система (1) обладает симметрией, будем искать решение, удовлетворяющее условию

$$A_i = A; \quad \Phi_i(x_i,\ sx_i) = \Phi(x,\ sx) = \left[q(A,\ \Omega) + \frac{q'(A,\ \Omega)}{\Omega}\, s\right] x_i. \tag{3}$$

Подставив в (1) $s = j\omega$, с учетом условия (3) и воспользовавшись комплексным выражением для переменной x_i ($x_i^{*} = Ae^{j(\Omega t - \varphi_i)}$), после сокращения на нулевой множитель $Ae^{j\Omega t}$ получим систему уравнений:

$$
\begin{aligned}
&z_1(j\omega,\ A,\ \Omega)\, e^{-j\varphi_1} + z_2(j\omega,\ A,\ \Omega)\, e^{-j\varphi_2} + \cdots + z_n(j\omega,\ A,\ \Omega)\, e^{-j\varphi_n} = 0;\\
&z_n(j\omega,\ A,\ \Omega)\, e^{-j\varphi_1} + z_1(j\omega,\ A,\ \Omega)\, e^{-j\varphi_2} + \cdots + z_{n-1}(j\omega,\ A,\ \Omega)\, e^{-j\varphi_n} = 0;\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (4)\\
&z_2(j\omega,\ A,\ \Omega)\, e^{-j\varphi_1} + z_3(j\omega,\ A,\ \Omega)\, e^{-j\varphi_2} + \cdots + z_1(j\omega,\ A,\ \Omega)\, e^{-j\varphi_n} = 0,
\end{aligned}
$$

где

$$z_i(j\omega,\ A,\ \Omega) = Q_i(j\omega) + P_i(j\omega)\,[q(A,\ \Omega) + jq'(A,\ \Omega)]. \qquad (5)$$

Систему (4) можно рассматривать как линейную однородную систему n-го порядка с комплексными коэффициентами относительно $e^{-j\varphi_1}$, $e^{-j\varphi_2}$, ..., $e^{-j\varphi_n}$. Для того, чтобы она имела ненулевое решение, ее характеристическое уравнение должно иметь вид:

$$D(j\omega,\ A,\ \Omega) = \det \begin{bmatrix} z_1 & z_2 \cdots z_n \\ z_n & z_1 \cdots z_{n-1} \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ z_2 & z_3 \cdots z_1 \end{bmatrix} = 0. \qquad (6)$$

Определение параметров периодического режима и их устойчивость. Для исследования характеристического уравнения (6) с помощью метода производной аргумента (МПА) [2] выделим в (6) вещественную и мнимую части и найдем их производные по ω.

Рассмотрим функцию

$$R(\omega,\ A,\ \Omega) = \frac{d}{d\omega}[\arg D(j\omega,\ A,\ \Omega)] = \frac{UV' - U'V}{U^2 + V^2}, \qquad (7)$$

где

$$U = \operatorname{Re} D(j\omega,\ A,\ \Omega); \qquad V = \operatorname{Im} D(j\omega,\ A,\ \Omega);$$

$$U' = dU/d\omega; \qquad V' = dV/d\omega.$$

Функцию $R(\omega,\ A,\ \Omega)$ можно выразить через корни $s_k = x_k + jy_k$ уравнения (6) следующим образом [2]:

$$R(\omega,\ A,\ \Omega) = \sum_{k=1}^{n} \frac{-x_k(A,\ \Omega)}{x_k^2(A,\ \Omega) + [\omega - y_k(A,\ \Omega)]^2}. \qquad (8)$$

Из рассмотрения выражения (8) и свойств R—функции [2] видно, что в случае достижения корня мнимой оси (условие существования периодического решения) функция $R(\omega,\ A,\ \Omega)$ безгранично возрастает и терпит разрыв. Значения амплитуды и частоты, при которых это произойдет, и будут амплитудой A и частотой $\omega = \Omega$ автоколебаний.

Согласно МПА, для устойчивости системы необходимо и достаточно положительно определенной функции $R(\omega, A, \Omega)$ и выполнения критерия [2]:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty R(\omega, A, \Omega)\, d\omega > n - 1, \tag{9}$$

где α выбирается из условия $\alpha = \max(a_i/a_{i-1})$, a_i — коэффициенты уравнения (6).

Оценка качественных показателей переходного процесса. Характеристическое уравнение (6) позволяет судить о качестве системы в целом. При этом такие показатели качества, как время регулирования t_i и перерегулирование σ_i для каждого из сепаратных каналов не превышают значений тех же параметров, полученных для общего уравнения (6).

Оценки качества симметричной нелинейной МСАР можно получить, построив приближенный переходной процесс по уравнению (6). Применяя МГЛ [1], ищем решение для переходного процесса, как первое приближение в виде

$$x = a \sin \psi, \tag{10}$$

$$\frac{da}{dt} = a\xi, \qquad \omega = \frac{d\psi}{dt}, \tag{11}$$

где искомыми неизвестными будут медленно меняющиеся во времени значения показателя затухания ξ и частоты ω.

Колебательный переходной процесс в нелинейной системе, приближенно, описываемый формулами (10) и (11), определяется значениями пары комплексных корней $s = \xi \pm j\omega$ уравнения (6).

Применяя МПА [2], можно оценить значения ξ и ω с помощью $\max R(a, \omega)$, т. к. из [2] и рассмотрения (8) следует, что

$$\max R(a, \omega) > -\frac{1}{x_k(a)} \qquad \text{при } \omega = j_k(a), \tag{12}$$

т. е. все корни уравнения (6) лежат левее прямой

$$S = \frac{1}{\max R(a, \omega)}. \tag{13}$$

Исходя из этого, оценим значения ξ и ω с помощью $\max R(a, \omega)$ следующим образом:

$$\xi(a) \approx -\frac{1}{\max R(a, \omega)}, \qquad \omega(a) \approx \omega_{\max R(a, \omega)}(a). \tag{14}$$

Алгоритм расчета $R(a, \omega)$ и ее max по формуле (7) легко реализуется на ЦВМ. Решая совместно уравнения (10), (11) и учитывая (14), можно построить приближенный переходной процесс и с его помощью оценить максимальные значения времени регулирования t и перерегулирования σ, которые могут иметь место в отдельных каналах в процессе регулирования от некоторого начального значения рассогласования с амплитудой $a(0)$, подаваемого на векторный вход нелинейной симметричной МСАР.

Пример. Рассмотрим трехканальную релейную систему угловой стабилизации [4], которая описывается следующей системой уравнений:

$$
\begin{aligned}
&\dddot{x}_1 + \ddot{x}_1 + \dot{x}_1 + \operatorname{sign} x_1 + \operatorname{sign} x_2 = 0;\\
&\dddot{x}_2 + \ddot{x}_2 + \dot{x}_2 + \operatorname{sign} x_2 + \operatorname{sign} x_3 = 0;\\
&\dddot{x}_3 + \ddot{x}_3 + \dot{x}_3 + \operatorname{sign} x_3 + \operatorname{sign} x_1 = 0.
\end{aligned}
\tag{15}
$$

Здесь имеем:

$$
\begin{aligned}
&Q_1(s) = s^3 + s^2 + s; \qquad Q_2(s) = Q_3(s) = 0;\\
&P_1(s) = P_2(s) = 1; \qquad P_3(s) = 0.
\end{aligned}
\tag{16}
$$

Релейные функции $\Phi_i(x_i) = \operatorname{sign} x_i$ после гармонической линеаризации будут:

$$
\Phi_i(x_i) = q(a)\,x_i = \frac{4}{\pi a}\,x_i. \tag{17}
$$

В результате получаем характеристическое уравнение

$$
D(j\omega, a) = \det \begin{bmatrix} Q_1(j\omega) + q(a) & q(a) & 0 \\ 0 & Q_1(j\omega) + q(a) & q(a) \\ q(a) & 0 & Q_1(j\omega) + q(a) \end{bmatrix} =
$$

$$
= [Q_1(j\omega) + q(a)]^3 + q^3(a) = 0. \tag{18}
$$

Выделим в (18) вещественную и мнимую части, а также найдем их производные по ω. Получим:

$$
\begin{aligned}
&U = 3\omega^8 - (7 + 3q)\,\omega^6 + (3 + 9q)\,\omega^4 - 3(q + q^2)\,\omega^2 + 2q^3;\\
&V = \omega^9 - 6\omega^7 + 6(1 + q)\,\omega^5 - (1 + 6q + 3q^2)\,\omega^3 + 3q^2\omega;\\
&U' = 24\omega^7 - 6(7 + 3q)\,\omega^5 + 4(3 + 9q)\,\omega^3 - 6(q + q^2)\,\omega;\\
&V' = 9\omega^8 - 42\omega^6 + 30(1 + q)\,\omega^4 - 3(1 + 6q + 3q^2)\,\omega^2 + 3q^2.
\end{aligned}
\tag{19}
$$

Результаты расчета переходного процесса от начальной амплитуды $a(0) = 10$ показаны в табл. Здесь a – амплитуда, ω – частота, t – время, $x(t)$ – переходный процесс, s – значение выражения (9).

Из таблицы видно, что имеются три периодических решения с параметрами: $\Omega_1 = 0{,}46$; $A_1 = 3{,}05$; $\Omega_2 = 1$; $A_2 =$ [illegible]; $\Omega_3 = 2{,}18$; $A_3 = 0{,}13$, что совпадает с результатами, приведенными в [4]. Анализ результатов показывает, что только лишь первое из периодических решений устойчиво ($s \approx n$). Процесс от начального рассогласования до установления автоколебаний длится около 28с. Максимально возможное перерегулирование равно, приблизительно, $\sigma \approx 39.1\%$.

Таблица

a	$\omega, \frac{1}{c}$	$\max R(a, \omega)$	t, c	$x(t)$	s
10	0,12	25,15	0	10	8,95
9	0,14	23,41	2,51	8,59	8,95
8	0,16	21,68	5,11	6,29	8,95
7	0,18	19,97	7,82	3,17	8,95
6	0,22	18,84	10,68	—0,25	8,95
5	0,28	18,57	13,82	—3,34	8,95
4	0,36	22,51	17,53	—3,91	8,95
3,5	0,4	33,21	20,94	—0,28	8,95
3,2	0,44	87,51	24,5	3,16	8,95
3,1	0,45	220,15	27,24	1,59	8,97
3,05	0,46	—165,54	—	—	4,95
2,85	0,48	— 51,13	—	—	4,95
2,55	1	1460,42	—	—	4,95
2,5	1	—103,57	—	—	4,96
0,54	1,44	3,44	—	—	0,96
0,14	2,11	58,61	—	—	0,96
0,13	2,18	—125,15	—	—	0,96

Таким образом, предлагаемый способ исследования нелинейных симметричных МСАР позволяет непосредственно определять главные характеристики системы: частоты и амплитуды автоколебаний, их устойчивость и зависимость от параметров системы; показатель затухания колебаний в переходном процессе и основные параметры переходного процесса системы в целом и др. Наряду с этими важными достоинствами способа являются применимость его к системам высокого порядка и легкость реализации на ЦВМ.

ВНИИРИ 21. V. 1981

Վ. Ն. ՆԵՐՍԵՍՅԱՆ

ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ԲԱԶՄԱՉԱՓ ԱՎՏՈՄԱՏ ԿԱՐԳԱՎՈՐՄԱՆ ՀԱՄԱՉԱՓ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐԻ ՎԵՐԼՈՒԾՈՒԹՅՈՒՆԸ

Ա մ փ ո փ ու մ

Հիմնվելով բնութագրիչ բազմանդամի արգումենտի ածանցյալի մեթոդի վրա, առաջարկվում է հարմոնիկ գծայնացման ու գծային բազմակապ ավ-

տամատ համաչափ համակարգերի հետազոտման նոր միջոց, որը հնարավորություն է տալիս ուսումնասիրել պարբերական ռեժիմները և անցողիկ պրոցեսների որակը։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Попов Е. П., Пальтов И. П.* Приближенные методы исследования нелинейных автоматических систем.—М.: Физматгиз, 1960.—792 с.
2. *Мелкумян Д. О.* Исследования САУ методом производной аргумента.—Изв. АН Арм ССР (серия Т. Н.), 1971, т. XXIV, № 6, с. 3—7.
3. *Соболев О. С.* Однотипные связанные системы регулирования.—М.: Энергия, 1973.—136 с.
4. *Поляков В. В.* Автоколебания в трехканальных нелинейных системах управления.—Дисс. канд. тех. наук.—М., 1974.—109 с.