

МАШИНОСТРОЕНИЕ

Л. М. МУРАДЯН, Р. Н. БАРСЕГЯН

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ТРЕЩИНЫ
 В ЗАТВЕРДЕВАЮЩЕМ СЛИТКЕ

В процессе непрерывной разливки стали при некоторых значениях совокупности технологических и конструктивных параметров, действующих на напряженно-деформированное состояние образующейся корки, появляются внутренние трещины. Трещины, появляющиеся в зоне двухфазного состояния затвердевающего непрерывного слитка, являются одним из основных причин, ограничивающих рост производительности установок непрерывной разливки стали и ухудшения качества блюмовых и слябовых заготовок. Дальнейший рост трещин в глубину твердой корки может привести к аварийным ситуациям — прерыванию непрерывного процесса.

Как показывают экспериментальные исследования, проведенные в натуральных условиях [1], при образовании трещины она заполняется жидким металлом, что приводит к изменению температурного градиента вблизи ее вершины. Коэффициент интенсивности напряжений у вершины трещины, характеризующий возможность распространения образовавшейся трещины в твердую корку, зависит от величины внешних силовых факторов, действующих на слиток (конструктивные параметры машины в данной зоне), степени заполнения и температуры на свободной поверхности твердой корки (технологические параметры).

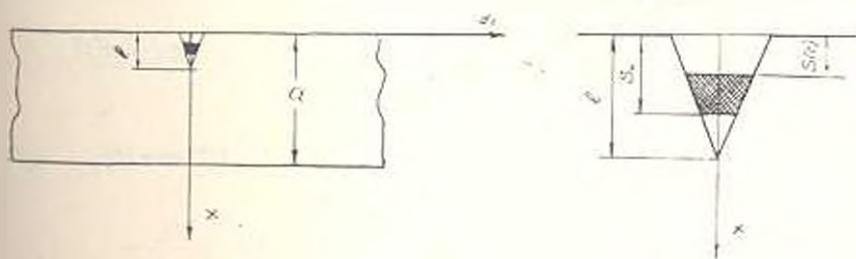


Рис. 1. Расчетная схема.

Настоящая работа посвящена определению влияния этих факторов на коэффициент интенсивности напряжений с учетом затвердевания во времени жидкого металла, заполнявшего трещину (рис. 1). Решая задачу о возможности распространения трещины в глубину затвердевшей

корки, параллельно исследуется возможность «залечивания» или раскрытия существующей трещины, заполненной жидким отвердевающим металлом. Небольшой градиент температурного поля у вершины трещины позволяет в первом приближении строить решение задачи без учета влияния изменения температуры на упругие характеристики стали.

Температурное поле слитка в поперечном сечении, охватывающее трещину, можно получить, решая уравнение теплопроводности

$$\kappa_1 \nabla^2 T - \frac{\partial T}{\partial t} = q_1 \delta(x - z_1) \delta(y_1) \delta(t) \quad (1)$$

при следующих граничных условиях —

$$\begin{aligned} x = 0; & \quad T(0; y_1, t) = T_0 = \text{const}; \\ x = a; & \quad T(a; y_1, t) = \varphi(t); \\ y_1 = 0; & \quad \frac{\partial T}{\partial y_1}(x, y_1, t) = 0; \\ t = 0; & \quad T(x, y_1, 0) = f(x), \end{aligned} \quad (2)$$

где $q_1 = \frac{Q \rho_0}{k_0}$ — количество тепла, выделившееся в щели; Q — мощность точечных мгновенных источников тепла, распределенных в щели; ρ , c — плотность и удельная теплоемкость; k , k_0 — коэффициенты затвердевания и теплопроводности вещества; $s(t)$ — часть трещины, заполненной расплавленным металлом, со временем $s(t) \rightarrow 0$ (жидкий металл затвердевает) — $s(t) = s_0 - k \sqrt{t}$.

Принимая обозначения

$$\frac{x_1}{a^2} = x, \quad \pi n_1 = n, \quad \frac{y_1}{a} = y, \quad \eta = \frac{s(t)}{a}, \quad q = \frac{q_1}{a},$$

решение поставленной задачи можно представить при помощи следующей функции:

$$\begin{aligned} T = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q}{\pi^2} \frac{\cos n\eta - 1}{n} \sin n\xi \exp\left(-\frac{y^2}{4\tau} - n^2\tau\right) + 2 \exp(-n^2\tau) \times \\ \times \sin n\xi \left(\int_0^{\xi} f(x) \sin nx dx + \frac{T_2}{n} (e^{n\xi} - 1) - (-1)^n n \varphi(t) \right), \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$\xi = \frac{x}{a}; \quad \eta = \frac{s}{l}; \quad \tau = x_1 t; \quad t\varphi(t) = \int_0^{\eta} e^{-n^2 t} \varphi(t) dt, \quad (4)$$

Определение напряженного состояния полосы сводится к решению следующего уравнения относительно функции Эри

$$\nabla^2 \Phi = -\alpha k (1 + m) \nabla^2 T \quad (5)$$

при граничных условиях:

$$\begin{aligned}
 x_1 = 0; & \quad \varepsilon_x = 0; & \quad \tau_{xy} = 0; \\
 x_1 = a; & \quad \sigma_x = 0; & \quad \tau_{xy} = 0; \\
 & \quad \sigma_y = 0; & \quad x < s(t); & \quad (a) \\
 & \quad v = 0; & \quad s(t) < x < s_0; & \quad (b) \\
 y_1 = 0; & \quad \sigma_y = 0; & \quad s_0 < x < l; & \quad (c) \\
 & \quad v = 0; & \quad l < x < a; & \quad (d) \\
 & \quad \tau_{xy} = 0; & \quad 0 < x < a. & \quad (6)
 \end{aligned}$$

Для ее решения рассматривается вспомогательная задача, в которой граничные условия те же, за исключением (б, с). Решение такой задачи в безразмерных координатах имеет вид:

$$\begin{aligned}
 \Phi = & 2E_0(1 + m) \sum_{n=1}^{\infty} \sin nx n^{-2} T_2 + \\
 & + \frac{2q}{\pi} \int_0^{\beta} \left\{ \frac{\sin nx}{n} + \left[\left(1 - \frac{\beta \operatorname{sh} \beta (1 - (-1)^n)}{\operatorname{sh}^2 \beta - \beta^2} \right) \operatorname{sh} \beta x + \right. \right. \\
 & + \left. \left(\frac{\operatorname{sh} \beta - \beta \operatorname{ch} \beta}{\operatorname{sh}^2 \beta - \beta^2} (1 + (-1)^n) - \frac{1}{\beta} \right) \beta x \operatorname{sh} \beta x + \frac{\beta \operatorname{sh} \beta}{\operatorname{sh}^2 \beta - \beta^2} \times \right. \\
 & \left. \left. \times (1 + (-1)^n) \beta x \operatorname{ch} \beta x \right] \beta^{-1} \frac{1}{\beta^2 + n^2} (\cos n\theta - 1) e^{-n^2 \beta^2 y} \cos \beta y d\beta; \quad (7) \right. \\
 T_2 = & e^{-n^2 x} \left\{ \int_0^l f(x) \sin nx dx + \frac{T_0}{n} (e^{n^2} - 1) - (-1)^n n x \int_0^l e^{n^2 x} \varphi(x) dx \right\}.
 \end{aligned}$$

В конечном итоге задача (5) с граничными условиями (6) сводится к решению задачи бесконечной полосы со свободными поверхностями и поперечными киллинеарными трещинами, одна из которых внутренняя, а вторая краевая, на границах которых действуют известные нормальные напряжения:

$$\begin{aligned}
 \sigma_x = & -aE_0(1 + m) \sum_{n=1}^{\infty} T_2 \sin nx + \\
 & + \frac{2q}{\pi} \int_0^{\beta} \left\{ n \sin nx - \left[\left(\frac{1 + (-1)^n}{\operatorname{sh}^2 \beta - \beta^2} \beta \operatorname{sh} \beta + 1 \right) \operatorname{sh} \beta x + \right. \right. \\
 & + \left. \left[\frac{\operatorname{sh} \beta - \beta \operatorname{ch} \beta}{\operatorname{sh}^2 \beta - \beta^2} ((-1)^n + 1) - \frac{1}{\beta} \right] [\beta x \operatorname{sh} \beta x + 2 \operatorname{ch} \beta x] + \right. \\
 & \left. + [1 + (-1)^n] \frac{\beta \operatorname{sh} \beta}{\operatorname{sh}^2 \beta - \beta^2} \beta x \operatorname{ch} \beta x \right] \cdot \beta \left\} \frac{\cos n\theta - 1}{\beta^2 + n^2} e^{-n^2 \beta^2 y} d\beta. \quad (8)
 \end{aligned}$$

Используя полученные результаты, можно решить упругую задачу бесконечной полосы с коллинеарными трещинами, на берегах которых приложены нормальные напряжения, равные, но противоположные вышеупомянутым напряжениям:

$$\sigma_x = -P(x). \quad (9)$$

Это сводится к решению систем интегральных уравнений первого рода [2]:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 v_1'(\eta) \left(\frac{1}{\eta - \xi_1} + \Delta_{11} \right) d\eta + \int_{-1}^1 v_2'(\eta) \Delta_2 d\eta &= \pi p_1(\xi); \\ \int_{-1}^1 v_2'(\eta) \left(\frac{1}{\eta - \xi_2} + \Delta_{22} \right) d\eta + \int_{-1}^1 v_1'(\eta) \Delta_1 d\eta &= \pi p_2(\xi), \end{aligned} \quad (10)$$

где v — нормальное перемещение;

$$\begin{aligned} \Delta_{ii} &= \int_0^{\infty} \left[\left(\frac{1}{\operatorname{sh} 2\tau + 2\tau} + \frac{1}{\operatorname{sh} 2\tau - 2\tau} \right) (H_i + \bar{C}_i) + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{\operatorname{sh} 2\tau + 2\tau} - \frac{1}{\operatorname{sh} 2\tau - 2\tau} \right) (G_i + \bar{H}_i) \right] d\tau; \\ \Delta_i &= \frac{\eta_i - \xi_j}{[\lambda_j (b - c)^2 + (\eta_i - \xi_j)^2]} + \frac{2\lambda_j (b - c) (\eta_i - \xi_j)}{[\lambda (b - c)^2 + (\eta_i - \xi_j)^2]} + \\ &\quad + \int_0^{\infty} \left[\left(\frac{1}{\operatorname{sh} 2\tau + 2\tau} + \frac{1}{\operatorname{sh} 2\tau - 2\tau} \right) (H_j + \bar{C}_j) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\operatorname{sh} 2\tau + 2\tau} - \frac{1}{\operatorname{sh} 2\tau - 2\tau} \right) (G_j + \bar{H}_j) \right] d\tau; \\ H_{jj} + \bar{G}_{jj} &= \frac{\lambda_j}{2} \{ 2(-1 + 2\tau - \lambda_j^2 \tau^2 \eta_i - \tau^2) \operatorname{sh} [\lambda_j \tau (\xi_j + \eta_i)] - \\ &\quad - \lambda_j \tau [2\eta_i - 2\tau (\eta_i + \xi_j) + \xi_j + \eta_i] \operatorname{ch} [\lambda_j \tau (\xi_j + \eta_i)] + 2e^{-2\tau} \operatorname{sh} [\lambda_j \tau (\xi_j - \eta_i)] + \\ &\quad \left. + e^{-2\tau} (\xi_j - \eta_i) \lambda_j \tau \operatorname{ch} [\lambda_j \tau (\xi_j - \eta_i)] \right\}; \\ \bar{H}_{jj} + G_{jj} &= \frac{\lambda_j}{2} \{ 2(1 - 2\tau - \lambda_j^2 \tau^2 \eta_i + \tau^2) \operatorname{sh} [\lambda_j \tau (\xi_j - \eta_i)] + \\ &\quad + \lambda_j \tau [\xi_j - 3\eta_i + 2\tau (\eta_i - \xi_j)] \operatorname{ch} [\lambda_j \tau (\xi_j - \eta_i)] - 2e^{-2\tau} \operatorname{sh} [\lambda_j \tau (\xi_j + \eta_i)] + \\ &\quad \left. + e^{-2\tau} (\xi_j + \eta_i) \lambda_j \tau \operatorname{ch} [\lambda_j \tau (\xi_j + \eta_i)] \right\}; \end{aligned}$$

$$\bar{H}_i + C_i = \frac{\lambda_i}{2} \{2(1 - 2\tau - \tau^2 \lambda_i^2 \xi_i \tau + \tau^2) \operatorname{sh} [\lambda_i \tau (\xi_i - \tau)] + \\ + \lambda_i \tau [\xi_i - 3\tau + 2\tau(\tau - \xi_i)] \operatorname{ch} [\lambda_i \tau (\xi_i - \tau)] - 2e^{-2\tau} \operatorname{sh} [\lambda_i \tau (\xi_i + \tau)] + \\ + e^{-2\tau} \lambda_i \tau (\xi_i + \tau) \operatorname{ch} [\lambda_i \tau (\xi_i + \tau)]\} \cos(b - c) \tau;$$

$$\bar{G}_i + H_i = \frac{\lambda_i}{2} \{2(-1 + 2\tau - \tau^2 \lambda_i^2 \xi_i \tau - \tau^2) \operatorname{sh} [\lambda_i \tau (\xi_i - \tau)] - \\ - \lambda_i \tau [3\tau - 2\tau(\xi_i + \tau) + \xi_i] \operatorname{ch} [\lambda_i \tau (\xi_i - \tau)] + 2e^{-2\tau} \operatorname{sh} [\lambda_i \tau (\xi_i - \tau)] + \\ + e^{-2\tau} (\xi_i - \tau) \lambda_i \tau \operatorname{ch} [\lambda_i \tau (\xi_i - \tau)]\} \cos(b - c) \tau;$$

$$b = \frac{b_0}{a}; \quad c = \frac{c_0}{a}; \quad i = 1, 2; \quad j = 1, 2.$$

Здесь индекс (1) соответствует краевой, а (2) — внутренней трещине, (') — обозначает дифференцирование по x .

Следуя [3], представляем функции в виде

$$v_1(z_m) = w(z)(1 - z^2)^{-1/2}, \quad v_2(z_m) = v(z)(1 - z^2)^{-1/2},$$

где $w(z)$ и $v(z)$ ищем в виде интерполяционного полинома Лагранжа по Чебышевским узлам:

$$z_m = \cos \frac{2m-1}{2l} \pi; \quad z_n = \cos \frac{2n-1}{2j} \pi, \quad (11)$$

где l и j — натуральные числа.

Из системы интегральных уравнений получим $i+j-2$ линейных алгебраических уравнений для определения $i+j$ неизвестных:

$$\frac{1}{i} \sum_{m=1}^i w(z'_m) \left(\frac{1}{z_m - \xi_k} + \Delta_{11}(z'_m, \xi_k) \right) + \frac{1}{j} \sum_{n=1}^j v(z'_n) \Delta_2(z'_n, \xi_k) = f_k^{(1)}, \\ k = 1, 2, \dots, i-1 \quad (12)$$

$$\frac{1}{l} \sum_{m=1}^l w(z_m) \Delta_1(z_m, \xi_k) + \frac{1}{j} \sum_{n=1}^j v(z'_n) \left(\frac{1}{z'_n - \xi_k} + \Delta_{22}(z'_n, \xi_k) \right) = f_k^{(2)}, \\ k = 1, 2, \dots, j-1.$$

где

$$z'_m = \frac{z_m}{2} + \frac{c_0}{c_1} + \frac{1}{2}; \quad \xi_k^{(1)} = \frac{\xi_k^{(1)}}{2} + \frac{c}{c_1} + \frac{1}{2}; \\ z'_n = \frac{z_n}{2} + \frac{b}{c_2} + \frac{1}{2}; \quad \xi_k^{(2)} = \frac{\xi_k^{(2)}}{2} + \frac{b}{c_2} + \frac{1}{2}; \\ \xi_k^{(1)} = \cos \frac{k\pi}{l}; \quad \xi_k^{(2)} = \cos \frac{k\pi}{j}; \quad f_k = \frac{1}{\pi} P(\xi).$$

Недостающие 2 уравнения получаем из условий:

$$v_n(-1) = 0; \quad w_n(-1) = 0; \quad (13)$$

$$\sum_{n=1}^i (-1)^n v(z'_n) \operatorname{tg} \frac{2n-1}{4i} \pi = 0; \quad \sum_{m=1}^j w(z''_m) = 0. \quad (14)$$

В конечном итоге для определения $i+j$ неизвестных имеем $i+j$ алгебраических уравнений (12) и (14). Решая полученную систему, интенсивности концентрации напряжений определяем по следующим формулам:

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{\alpha E_0}{\pi} \sqrt{\frac{l_2}{2}} \frac{1}{i} \sum_{n=1}^i (-1)^n w_n \operatorname{ctg} \frac{2n-1}{4i} \pi; \\ K_2 &= \frac{\alpha E_0}{\pi} \sqrt{\frac{l_1}{2}} \frac{1}{i} \sum_{m=1}^i (-1)^{m+1} v_m \operatorname{ctg} \frac{2m-1}{4i} \pi; \\ K_3 &= \frac{\alpha F_0}{\pi} \sqrt{\frac{l_1}{2}} \frac{1}{i} \sum_{m=1}^i (-1)^m v_m \operatorname{tg} \frac{2m-1}{4i} \pi, \end{aligned} \quad (15)$$

где K_1 соответствует вершине красвой трещины, а K_2 и K_3 — «верхним» и «нижним» вершинам внутренней трещины (под «верхней» вершиной трещины подразумевается вершина, направленная в сторону красвой трещины).

Приведенные графики изменения во времени коэффициентов интенсивности напряжений у вершин двух коллинеарных трещин K_1 , K_2 , K_3 построены на основе численного решения полученных интегральных уравнений (рис. 2). Как видно, наиболее резкое изменение этих коэффициентов наблюдается в начальной стадии затвердевания жидкого металла в щели и длится всего несколько секунд.

Если начальная длина возникшей трещины сравнительно велика (рис. 2а), ждать «залечивания» трещины без применения других внешних факторов, влияющих на напряженное состояние у вершины трещины бесполезно, т. к. в отвердевшей части трещины действует только растягивающие напряжения, а берега трещины расходятся; при этом проникновение трещины в глубь твердой корки тоже исключается ($K_3 < 0$).

Для трещин, длина которых меньше 4 мм (рис. 2б, в), «залечивание» трещины возможно при отсутствии других внешних факторов. Когда длина трещины равна около 4 мм, возможно образование пор у вершины трещины, благодаря совпадению знаков K_2 и K_3 в начальный период затвердевания жидкого металла в щели.

При более коротких «поверхностных» трещинах ($l < 2$ мм) происходит быстрое «залечивание» образовавшейся трещины.

Когда «залечивание» трещины отсутствует, задача сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма первого рода

$$\int_0^1 [k(\xi, \eta) - k(\xi, 0)] V(\eta) d\eta = \pi c(\xi), \quad 0 \leq \xi \leq 1. \quad (16)$$

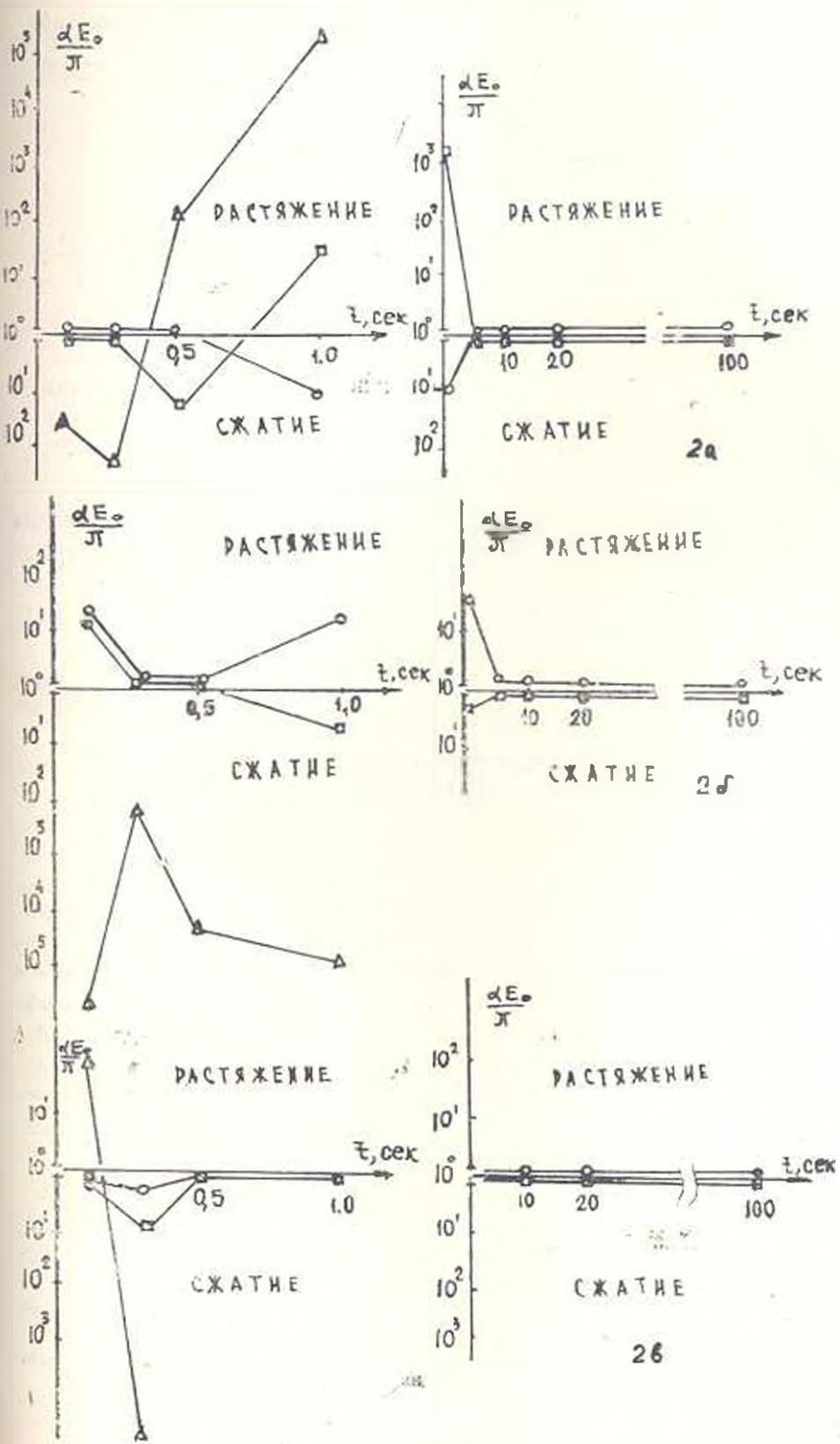


Рис. 2. Изменение коэффициента интенсивности напряжений во времени при:
 а) $l = 6 \text{ мм}, s_0 = 5.9 \text{ мм}$; б) $l = 4 \text{ мм}, s_0 = 3.9 \text{ мм}$; в) $l = 2 \text{ мм}, s_0 = 1.9 \text{ мм}$.
 $\Delta - K_1, \square - K_2, \circ - K_3$.

Аналогично вышеприведенному, получаем систему уравнений:

$$w_m = \frac{\varphi(\tau_m)}{s_0}; \quad (m = 1, 2, \dots, n)$$

$$\frac{1}{n} \sum_{m=1}^n W_m N_{m,k} = f_k; \quad (k = 1, 2, \dots, n-1)$$

$$N_{m,n} = \frac{1}{\tau_m - \xi_m} + k_1(\tau_m, \xi_m); \quad \xi_k = c \cos \frac{k\pi}{2}; \quad f_k = \frac{\sigma(\xi_k)}{s_0};$$

$$k_1(\tau_i, \xi) = h(\tau_i, \xi) - \frac{1}{\tau_i - \xi}; \quad s_0 = -2E(1+m).$$

Из условия $v(-1) = 0$ получаем недостающее n -ое уравнение:

$$\sum_{m=1}^n (-1)^m W_m \operatorname{ctg} \frac{2m-1}{4n} \pi = 0.$$

Решая систему, получаем W_m . Коэффициент интенсивности напряжений у вершины рассматриваемой трещины вычисляем по формуле:

$$K_1 = \sigma_0 \sqrt{\frac{l}{2}} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n (-1)^m W_m \operatorname{ctg} \frac{2m-1}{4n} \pi. \quad (17)$$

Լ. Մ. ՄՈՒՐԱԴՅԱՆ, Ռ. Ն. ՔԱՐՍՆՉՅԱՆ

ՊԵՌԱՏՈՂ ՉՈՒՎԱԿՏՈՐՈՒՄ ԱՌԱՋԱՅԱԾ ՀԱՔԻ
ԿԱՐՎԱՅՈՒՅՆ ՎԻՃԱԿ

Ա. մ. փ. ո. փ. ո. ի. մ.

Անընդհատ ձուլման մեքենայի տեխնոլոգիայի և կոնստրուկտիվ պարամետրերի ազդեցությունից պնդացող անընդհատ ձուլակտորի հեղուկ և պինդ ֆազերի սահմանադժում հաճախակի առաջ են գալիս ճաքեր: Գիտարկված է ճաքի դասաթում լարվածության գործակցի վրա տեխնոլոգիական գործոնների ազդեցությունը, հնդիրը լուծելիս հաշվի է առնված, որ ճաքը լցված է հեղուկ միտաղով, որը ժամանակի ընթացքում կարծրանում է:

Խնդրի լուծումը բերված է նրեղհարմի առաջին սերի ինտեգրալ հավասարումների համակարգի լուծման:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Хирому Фудзи, Тетсуро Охаси, Такаси Хиромото, К вопросу образования инт-ренных трещин сплавов, полученных непрерывным литьем. — Trans. of the Iron and Steel Ins. of Japan, 1978, No 8, p. 510—518.
2. Саирук М. П. Система произвольно ориентированных трещин в упругой полосе — МТТ, 1978, № 1, с. 91—98.
3. Панасюк В. В., Саирук М. П., Пацышук А. П. Распределение напряжений около трещин в пластинках и оболочках — Киев Наукова думка, 1976—443 с.