

С. В. ШАХВЕРДЯН, А. К. АБРАМЯН

ОПТИМИЗАЦИЯ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ
 С ФАЗОВЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Введение. Одним из сложных и актуальных вопросов и задач оптимизации систем управления является учет ограничений на фазовые координаты. В настоящее время задачи оптимизации дискретных систем управления, как правило, решаются методами нелинейного программирования (НП), используя для учета ограничений на фазовые координаты обычный метод штрафных функций (ШФ) или идею близкие к ним методы [1, 2].

Однако анализ этих методов и многочисленные экспериментальные исследования показали, что обычный метод ШФ решает проблему учета ограничений на фазовые координаты только нулевого порядка. Если же порядок ограничений равен или выше первого, тогда обычный метод ШФ проблему учета ограничений не решает. Здесь под порядком ограничений понимается наименьший порядок производной функции ограничений по времени [3, 4]. Это положение объясняется тем, что сопряженные переменные гамильтоновой системой в точках выхода фазовой траектории на границу допустимой области в общем случае должны быть разрывными. Когда же ограничение учитывается (например, методом ШФ), указанные переменные всегда непрерывны. Это противоречие свидетельствует о невозможности одновременного выполнения ограничений на фазовые координаты и условий на правом конце траектории обычным методом ШФ. Этот вывод подтверждают и многочисленные экспериментальные исследования, которые проводились авторами как на задачах невысокого порядка, так и сложных нелинейных задачах оптимального управления (задача оптимизации режимов энергосистем с гидростанциями переменного напряжения [7]).

Предлагается метод оптимизации дискретных систем управления с ограничениями на фазовые координаты, который является развитием метода интегральных ШФ и позволяет решить проблему учета ограничений на фазовые координаты любого порядка.

Постановка и решение задачи. Пусть требуется минимизировать

$$\sum_{i=0}^{l-1} f_i(x_i, u_i), \quad (1)$$

при следующих ограничениях:

$$x_{i+1} - x_i = f_i(x_i, u_i), \quad i = \overline{0, T-1}; \quad (2)$$

$$c_0 = x_0 - a_0 = 0; \quad c_T = x_T - a_T = 0; \quad (3)$$

$$q_i(u_i) \leq 0, \quad i = \overline{0, T-1}; \quad (4)$$

$$g_i(x_i) \leq 0, \quad i = \overline{0, T}. \quad (5)$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)$, $u = (u_1, \dots, u_m)$ — векторы состояния системы и управления; q — в общем случае s -мерный вектор; $s \leq 2m$; g — скаляр; a_0, a_T — n -мерные известные векторы; T — целое число, определяющее продолжительность управляемого процесса; f^0, f, q, g — непрерывные и непрерывно-дифференцируемые функции своих аргументов. Допустим также, что ограничение (5) имеет порядок $P \geq 1$ и фазовая траектория один раз выходит на границу допустимой области и один раз сходит с нее.

Так как воздействие на систему производится только посредством управляющего вектора, то для того, чтобы фазовая траектория на интервале $[k, j]$ лежала на границе допустимой области, т. е. на $g_i(x) = 0$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

$$G_k(x_k) = (g_k(x_k), g_k^{(1)}(x_k), \dots, g_k^{(P-1)}(x_k)) = 0; \quad (6)$$

$$\Phi_j(x_j) = g_j^{(P)}(x_j) = 0, \quad i \in [k, j], \quad z \in M, \quad (7)$$

где $M = \{1, \dots, P\}$; $g_i^{(l)}(x_i) = \frac{d^l g_i(x_i)}{dt^l} = \frac{d^l g_i(x_i)}{dt^l}$; k, j — соответственно, моменты выхода фазовой траектории на границу допустимой области и схода с нее.

Тогда задачу (1) — (5) можно свести к следующей задаче.

$$\min \{f^0(z) \mid q_i(z) \leq 0, \quad i = \overline{0, T-1}, \quad H(k)\Phi_j(z) = 0, \quad (8)$$

$$i = \overline{k, j}, \quad H(k)G_k(z) = 0, \quad c_T = 0\};$$

$$H(k) = \begin{cases} 1, & \text{если } k \in N, \\ 0, & \text{если } k \notin N, \quad N = \{0, \dots, T-1\}. \end{cases}$$

где $z = (u_0, \dots, u_{T-1})$; $x_i(z)$ — решение системы (2) в момент времени i при z с заданным начальным условием $c_0 = 0$.

Отметим, что в задаче (8) моменты k и j считаются неизвестными, поэтому их также необходимо включить в ряд параметров, по которым производится минимизация. Ограничение (1) можно учесть введением дополнительной управляющей матрицы размера $s \times T$, $V = [v_{ij}]$, с помощью которой (4) заменится равенством

$$\Omega_{ii} = q_{ii}(z) + v_{ii}^2 = 0, \quad i = \overline{1, s}, \quad i = \overline{0, T-1}, \quad (9)$$

где q_{ii} — i -компонента вектора q , записанная в момент i ; v_{ii} — ii -й элемент матрицы V .

Обозначая $Y = (z, k, j, V)$ и учитывая (9), задачу (8) можно свести к:

$$\min \{ f^0(Y) \mid \Omega_i(Y) = 0, \quad i = \overline{0, T-1}, \quad \Phi_i(Y) = 0, \\ i = \overline{k, j}, \quad G_k(Y) = 0, \quad c_T = 0 \}. \quad (10)$$

Алгоритм. Для решения задачи (10) предлагается следующий вычислительный алгоритм, основанный на модифицированном методе ШФ. Отметим, что модификация в методе ШФ заключается в дополнительном вводе условия (6) и равенства (7).

Составим внешнюю штрафную функцию, которая должна быть минимизирована:

$$I = \sum_{i=0}^{T-1} f_i^0(z_i) + \omega_0 \sum_{i=0}^{T-1} W[g_i^{(0)}(x_i)] + \omega_\Phi \sum_{i=k}^j W[g_i^{(\Phi)}(x_i)] + \omega_c W(c_T), \quad (11)$$

где $\omega_0, \omega_\Phi, \omega_c$ — штрафные коэффициенты:

$$W(Y) > 0, \quad \text{если } Y \neq 0;$$

$$W(c_T) = 0, \quad \text{если } c_T = 0;$$

$$W(c_T) > 0 \text{ — в противном случае.}$$

В процессе итераций управления u_i и штрафные коэффициенты ω меняются по выражениям:

$$u_i = - \left| \frac{\partial I}{\partial u_i} + \frac{\partial f_i^0}{\partial u_i} \Psi_{i+1} \right|, \quad i = \overline{0, T-1}; \quad (12)$$

$$\Psi_i = \frac{\partial f_i^0}{\partial x_i} \Psi_{i+1} + \frac{\partial I}{\partial x_i}, \quad \Psi_T = \frac{\partial I}{\partial x_T}, \quad i = \overline{0, T-1}; \quad (13)$$

$$\omega_0 = \nu(\omega_0) \beta(\omega^* - \omega) \sum_{i=0}^{T-1} W[g_i^{(0)}(x_i)]. \quad (14)$$

Для ω_Φ и ω_c получаются выражения, аналогичные (14), при этом

$$\beta(\omega^* - \omega) = \begin{cases} 1, & \text{если } \omega^* > \omega, \\ 0, & \text{если } \omega^* \leq \omega, \quad \nu(\omega) = \omega. \end{cases}$$

Решение задачи (10) организуется по следующей схеме.

1. Задаются начальное приближение $u_i, i = \overline{0, T-1}, e = \overline{1, m}, \omega_0, \omega_\Phi, \omega_c$.

2. Решается система (2) слева направо и определяются x_i , $i = \overline{1, T}$.

3. Справа налево решается (13).

4. По (12) и (14) определяются u_i , w_G , w_Φ , w_c .

5. Процесс с п. 2 по п. 4 повторяется до выполнения условия

$$|I^{r+1} - I^r| \leq \varepsilon,$$

где r — номер итерации; ε — заданное достаточно малое число. Значение I вычисляется по (11).

Экспериментальные исследования. Приводятся основные результаты решения задачи минимизации энергии при наличии ограничений. Она взята из [4], где дано точное ее решение.

Объект описывается системой:

$$\begin{cases} x_{i+1}^1 - x_i^1 = \frac{1}{2} (x_{i+1}^2 + x_i^2); \\ x_{i+1}^2 - x_i^2 = u_i, \end{cases} \quad (15)$$

$$i = \overline{0, T-1}, \quad x_0^1 = 0, \quad x_0^2 = 1.$$

Требуется определить управление u_i , $i = \overline{0, T-1}$, минимизирующее функцию

$$I = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{T-1} u_i^2 \quad (16)$$

при ограничениях

$$g_i(x^i) = x_i^1 - l \leq 0, \quad i = \overline{0, T-1}, \quad (17)$$

$$c_T^1 = x_T^1 - 0, \quad c_T^2 = x_T^2 + 1 = 0. \quad (18)$$

Эта задача решается методом ШФ с вводом тангенциальных ограничений (6) и (7) (модифицированный метод ШФ) и без ввода (6) и (7) (обычный метод ШФ). Сопоставление результатов численного решения с аналитическим позволяет дать реальную оценку каждому из этих методов.

При решении этой задачи обычным методом штрафная функция строится так:

$$I^* = \sum_{i=0}^{T-1} \left| \frac{\Delta}{2} u_i^2 + w_1 W_1(g_i(x^i)) \right| + w_2 W_2(c_T), \quad (19)$$

где

$$W_1(g_i(x^i)) = (x_i^1 - l) H(x_i^1 - l); \quad W_2(c_T) = c_T^2;$$

$$H(x_i^1 - l) = \begin{cases} 0, & \text{если } x_i^1 - l \leq 0, \\ 1, & \text{если } x_i^1 - l > 0. \end{cases}$$

Наилучшие результаты получены при сильно различающихся начальных значениях коэффициентов штрафа. При $\omega_1^0 = 800$, $\omega_2^0 = 1$ штрафная функция (19) от итерации к итерации непрерывно уменьшается, ограничение (17) удовлетворяется, однако правые концы траектории не удовлетворяют условиям (18). При этом, как правило, минимальное значение целевой функции получается меньше, чем в истинном решении.

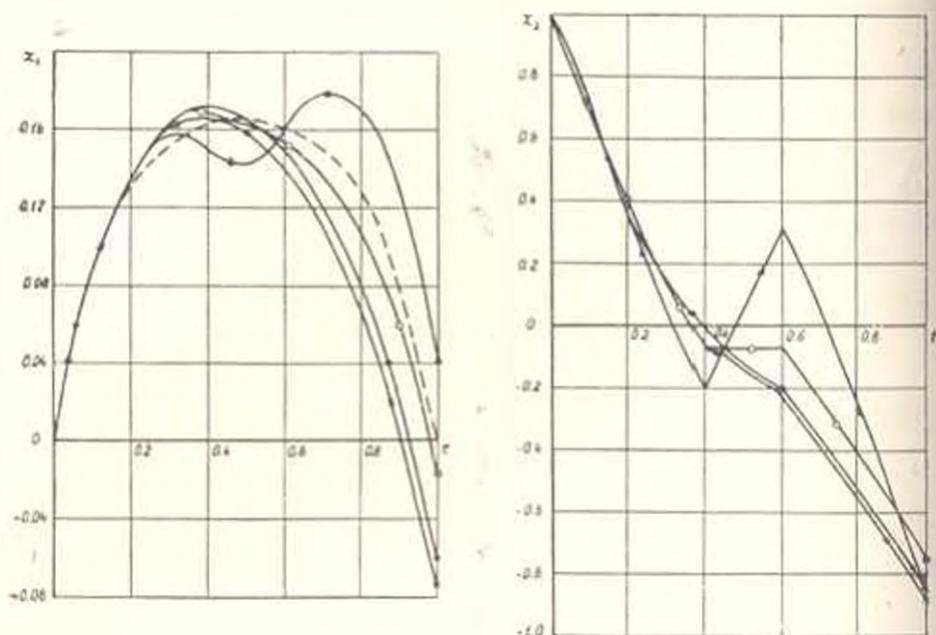


Рис. 1. Итерации: \blacktriangle — третья; \square — двадцать четвертая; \bullet — тридцать девятая; \triangle — сорок вторая. ---- Истинное решение.

На рис. 1 приводятся графики управляющей функции u и траекторий x^1 и x^2 в наиболее характерных итерациях, а также истинное решение задачи при $l = \frac{1}{6}$. Соответствующее изменение штрафных коэффициентов и целевой функции видно из табл. 1.

Таблица 1

Номер итерации	ω_1	ω_2	l^*	J
3	800	1,0128	4,8387	4,4428
12	600,4142	1,5299	3,117	2,5526
24	800,9654	3,7341	2,2772	2,0385
39	501,2119	6,1315	2,1712	2,0496
42	501,3126	6,3274	2,165	1,9751

При дальнейшем продолжении итераций (43, 44 и т. д.) улучшения решения не наблюдается.

При решении этой же задачи с введением ограничений (6) и (7) составлялась штрафная функция вида (11). Начальное приближение $u_i, i = 0, 1, \dots, 19$ бралось то же, что и в предыдущем случае (функции W также квадратичные). Применение второго алгоритма, описанного в предыдущем параграфе для случая $l = 0,135, m_G^0 = 100, m_D^0 = 300, \mu^0 = 2$, привело к решению, близкому к оптимальному (рис. 2, табл. 2).

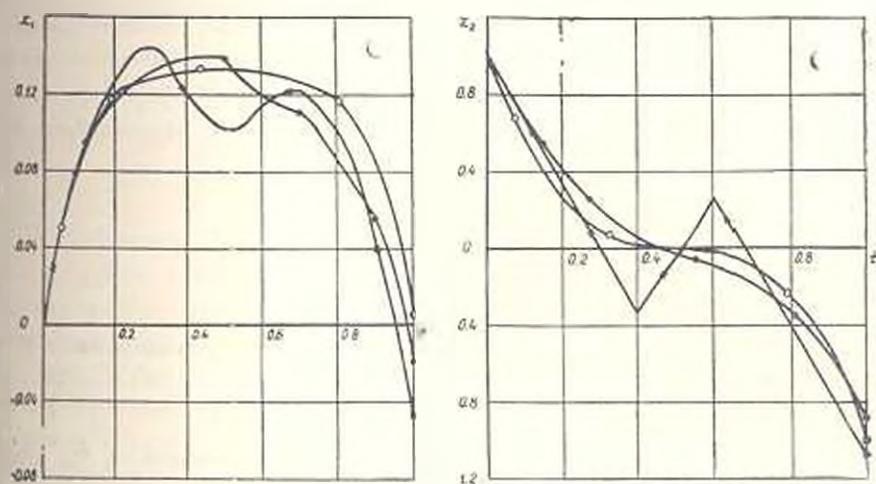


Рис. 2. Итерации: \times — первая; \circ — двадцатая; — — сорок пятая.

Таблица 2

Номер итерации	m_G	m_D	μ	F	I
1	100	300	2	5,0176	4,8045
20	112,7632	302,6621	3,1215	4,5837	4,4183
30	114,2305	303,4324	4,5279	4,0145	3,9873
40	115,7154	304,0842	5,0328	3,4207	3,3921
45	116,2416	304,5112	5,1723	3,3524	3,3285

Вывод. При решении дискретных задач оптимизации систем управления с фазовыми ограничениями в обычную штрафную функцию должны быть включены тангенциальные ограничения (6), записанные для всех моментов выхода фазовой траектории на границу допустимой области.

ՖԱԶԱՅԻՆ ՍԱՀՄԱՆԱՓՅԱԿՈՒՄՆԵՐՈՎ ԿԱՌԱՎԱՐՄԱՆ ԴԻՍԿՐԵՏ
ՀԱՄԱԿԱՐԿԵՐԻ ՍՊՏԻՄԻԶԱՑԻԱ

Ա մ փ ո փ ո ռ մ

Առաջարկվում է դիսկրետ օպտիմիզացիայով կառավարման համակարգերի՝ վերադրված ֆազային կոորդինատների սահմանափակումներով խնդիրների լուծման մի նոր մեթոդ: Ինքնուրույն են ֆազային սահմանափակումների հաշվարկման մեթոդից անկախ տանգենցիալ սահմանափակումների ողտադորման անհրաժեշտությանը ցուցադրող փորձնական հետազոտությունների արդյունքները:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Полак Э. Численные методы оптимизации. М., «Мир», 1974
2. Левитин Е. С., Полак Б. Т. Методы минимизации при наличии ограничений. ЖВМ и МФ, 1966, т. 6, № 5.
3. Семенов А. С., Троицкий В. А. О задачах оптимизации с ограничениями на фазовые координаты. ПММ, 1970, т. 34, вып. 1.
4. Брайсон А., Хо-Ю-Ши. Прикладная теория оптимального управления. М., «Мир», 1972.
5. Хедли Дж. Нелинейное и динамическое программирование. М., «Мир», 1967.
6. Егупиенко Ю. Г. Численные методы решения задач нелинейного программирования ЖВМ и МФ, 1966, т. 16, № 2.
7. Шахвердян С. В. К численным методам управления суточными режимами энергосистем с учетом нестационарных процессов в нижнем бьефе ГЭС. «Электричество», 1974, № 11.