ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Տեխնիկական գիտություններ, հատոր XXXIV, № 5, 1981 Серия технических наук

ГИДРОТЕХНИКА

М. А. ТАРАКЧЯН

ОБ ОДНОЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ЗАДАЧЕ МАССОПЕРЕНОСА ПРИ ЗАГРЯЗНЕНИИ ПОДЗЕМНЫХ ВОД

Вопрос о загрязнении подземных вод, используемых для хозяйственно-питьевого водоснабжения, поверхностными водоисточниками в настоящее время является весьма актуальным. Опасность загрязнения подземных вод возникает в связи с фильтрацией в водоносные пласты сточных вод и жидких отходов промышленных и сельскохозяйственных производств, хозяйственно-бытовых стоков городов и населенных пунктов.

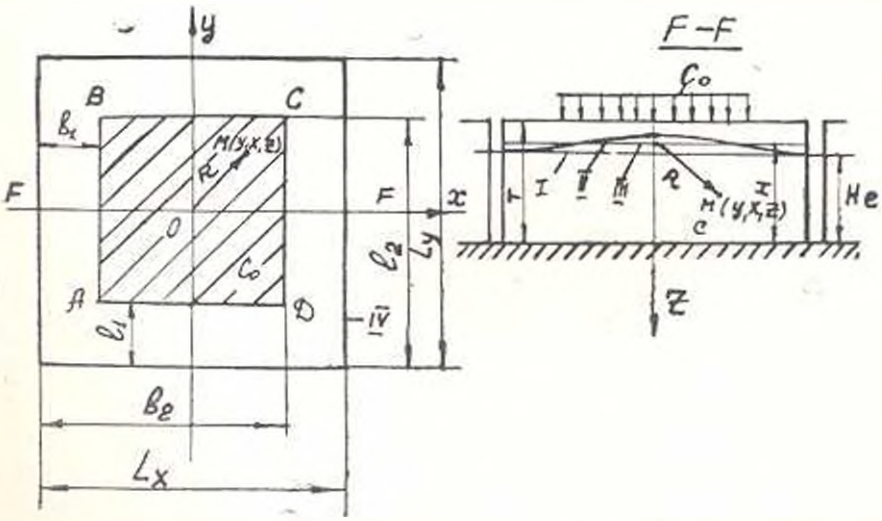

Рис. 1. I — уровень грунтовых вод до промывки, II — бугор, образовавшийся вследствие промывки, III — осредненный уровень грунтовых вод, IV — совершенный горизонтальный дренаж по контуру на расстоянии $l_1 = b_1$

В настоящей работе рассмотрена пространственная задача прогноза гидрохимического состава подземных вод при площадной схеме загрязнения (рис. 1), наблюдаемой при капитальных промывках засоленных участков. Дифференциальное уравнение конвективной диффузии

солей, на основании которого может быть вычислена концентрация $C(x, y, z, t)$, имеет вид [1, 2]:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left|D_x\frac{\partial C}{\partial x}\right|+\frac{\partial}{\partial y}\left|D_y\frac{\partial C}{\partial y}\right|+\frac{\partial}{\partial z}\left|D_z\frac{\partial C}{\partial z}\right|-\frac{\partial|v_xC|}{\partial x}-$$

$$-\frac{\partial|v_yC|}{\partial y}-\frac{\partial|v_zC|}{\partial z}-\frac{\partial N}{\partial t}=m_0\frac{\partial C}{\partial t}, \qquad (1)$$

где $D=D_м+D_г=D_м+\varkappa v$ — коэффициент конвективной диффузии; $D_м$, $D_г$ — коэффициенты молекулярной диффузии и гидравлической дисперсии; $\varkappa$ — параметр дисперсии; v_x, v_y, v_z, $\frac{\partial N}{\partial t}$ — скорости фильтрации и массообмена; m_0 — пористость грунта.

Для частного случая однородной толщи при условии, что в процессе фильтрации происходит равновесная сорбция загрязнений, содержащихся в подземных водах, причем, изотерма сорбции считается линейной (по Генри), уравнение (1) имеет вид:

$$D_x\frac{\partial^2C}{\partial x^2}+D_y\frac{\partial^2C}{\partial y^2}+D_z\frac{\partial^2C}{\partial z^2}-v_x\frac{\partial C}{\partial x}-v_y\frac{\partial C}{\partial y}-v_z\frac{\partial C}{\partial z}=m\frac{\partial C}{\partial t}, \qquad (2)$$

где $m=m_0(1+\Gamma)$ — активная пористость грунта; Γ — коэффициент Генри.

Уравнение (2) относится к дифференциальным уравнениям в частных производных 2-го порядка с переменными коэффициентами, аналитическое решение которых не представляется возможным. Для его приближенного решения можно применить численный метод. Рассмотрим прямоугольную пространственно-временную сетку узлов, образуемую точками пересечения семейств параллельных прямых $x=i\Delta x$, $y=j\Delta y$ $z=k\Delta z$, $t=n\Delta t_n$ ($i=1, \ldots, i$; $j=1, \ldots, k=1, \ldots, n=1, \ldots$). Здесь Δx, Δy, Δz, Δt_n — принятые шаги по осям x, y, z, t, причем, $\Delta l=\Delta x=\Delta y$

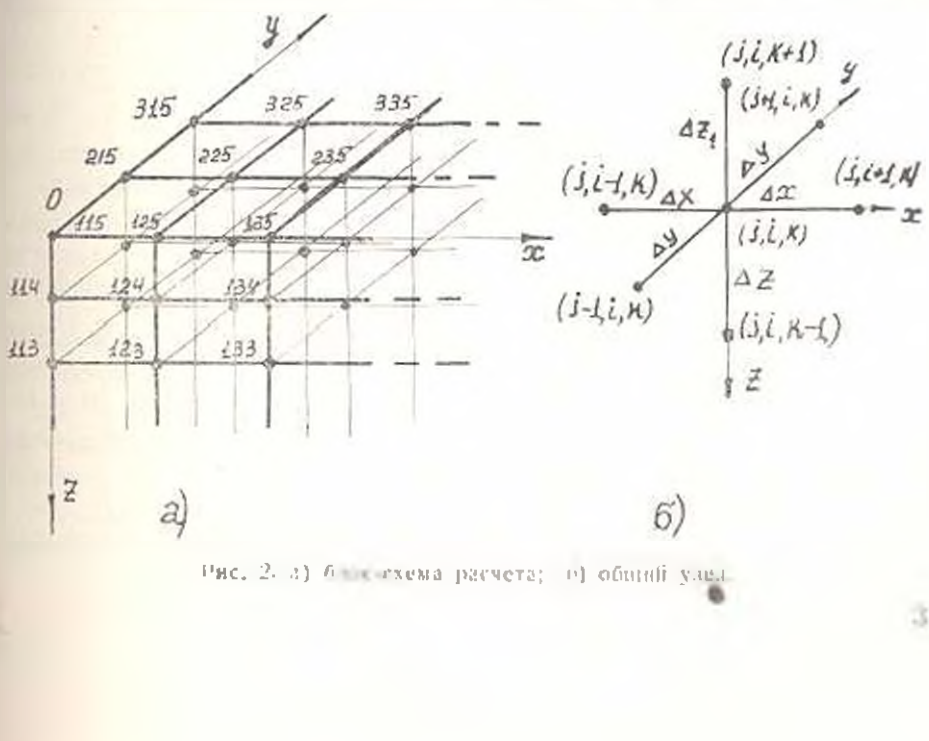

Рис. 2. а) блок-схема расчета; б) общий узел

Заменяя производные в узле (j, i, k) разностными отношениями и используя явную вычислительную схему [3], получим конечно-разностную аппроксимацию дифференциального уравнения (2). После преобразования, искомая концентрация в узле (j, i, k) (рис. 2) на $n+1$ шаге во времени выразится следующей зависимостью:

$$C^{tn+1}_{(j,i,k)} = C^{tn}_{(j,i,k)} + \Phi_{13(j,i,k)}\left[\frac{C^{tn}_{(j,i-1,k)} - C^{tn}_{(j,i,k)}}{\Phi_{1(j,i,k)}} + \right.$$

$$+ \frac{C^{tn}_{(j,i+1,k)} - C^{tn}_{(j,i,k)}}{\Phi_{2(j,i,k)}} + \frac{C^{tn}_{(j,i,k-1)} - C^{tn}_{(j,i,k)}}{\Phi_{3(j,i,k)}} +$$

$$+ \frac{C^{tn}_{(j,i,k+1)} - C^{tn}_{(j,i,k)}}{\Phi_{4(j,i,k)}} - \frac{C^{tn}_{(j-1,i,k)} - C^{tn}_{(j,i,k)}}{\Phi_{5(j,i,k)}} +$$

$$+ \frac{C^{tn}_{(j+1,i,k)} - C^{tn}_{(j,i,k)}}{\Phi_{6(j,i,k)}} + \frac{C^{tn}_{(j,i-1,k)} - C^{tn}_{(j,i,k)}}{\Phi_{11(j,i,k)}} -$$

$$- \frac{C^{tn}_{(j,i+1,k)} - C^{tn}_{(j,i,k)}}{\Phi_{8(j,i,k)}} - \frac{C^{tn}_{(j,i,k-1)} - C^{tn}_{(j,i,k)}}{\Phi_{12(j,i,k)}} +$$

$$+ \frac{C^{tn}_{(j,i,k+1)} - C^{tn}_{(j,i,k)}}{\Phi_{10(j,i,k)}} + \frac{C^{tn}_{(j-1,i,k)} - C^{tn}_{(j,i,k)}}{\Phi_{9(j,i,k)}} -$$

$$\left. - \frac{C^{tn}_{(j+1,i,k)} - C^{tn}_{(j,i,k)}}{\Phi_{16(j,i,k)}} \right|, \qquad (3)$$

где

$$\Phi_{1(j,i,k)} = \frac{1}{\alpha v_{1(j,i,k)} \cdot \Delta z_{cp(j,i,k)}}; \qquad \Phi_{3(j,i,k)} = \frac{\Delta z_{(j,i,k)}}{\alpha v_{3(j,i,k)} \Delta l^2};$$

$$\Phi_{2(j,i,k)} = \frac{1}{\alpha v_{2(j,i,k)} \Delta z_{cp(j,i,k)}}; \qquad \Phi_{4(j,i,k)} = \frac{\Delta z_{1(j,i,k)}}{\alpha v_{4(j,i,k)} \Delta l^2};$$

$$\Phi_{5(j,i,k)} = \frac{1}{\alpha v_{5(j,i,k)} \Delta z_{cp(j,i,k)}}; \qquad \Phi_{6(j,i,k)} = \frac{1}{\alpha v_{6(j,i,k)} \Delta z_{cp(j,i,k)}};$$

$$\Phi_{7(j,i,k)} = \frac{1}{v_{1(j,i,k)} \Delta l \Delta z_{cp(j,i,k)}}; \qquad \Phi_{8(j,i,k)} = \frac{2}{v_{2(j,i,k)} \Delta l \Delta z_{cp(j,i,k)}};$$

$$\Phi_{9(j,i,k)} = \frac{2}{v_{5(j,i,k)} \Delta l \Delta z_{cp(j,i,k)}}; \qquad \Phi_{10(j,i,k)} = \frac{2}{v_{6(j,i,k)} \Delta l \Delta z_{cp(j,i,k)}};$$

$$\Phi_{11(j,i,k)} = \frac{2}{v_{3(j,i,k)} \Delta l^2}; \qquad \Phi_{12(j,i,k)} = \frac{2}{v_{4(j,i,k)} \Delta l^2};$$

$$\Phi^{tn}_{13(j,i,k)} = \frac{\Delta t}{m \Delta l^2 \Delta z_{cp(j,i,k)}}; \qquad \Delta z_{cp(j,i,k)} = \frac{\Delta z_{(j,i,k)} + \Delta z_{1(j,i,k)}}{2};$$

$v_{1(j,i,k)}$, $v_{2(j,i,k)}$, $v_{3(j,i,k)}$, $v_{4(j,i,k)}$, $v_{5(j,i,k)}$, $v_{6(j,i,k)}$ — средние скорости в отрезках $[(j, i, k)-(j, i-1, k)]$, $[(j, i+1, k)-(j, i, k)]$, $[(j, i, k-1)-(j, i, k)]$, $[(j, i, k)-(j, i, k+1)]$, $[(j, i, k)-(j-1, i, k)]$, $[(j+1, i, k)-(j, i, k)]$.

Устойчивость разностного уравнения (3) требует, чтобы $C^{l+1}_{(j,i,k)}$ было ограниченным. Это условие обеспечивается в случае, когда коэффициенты при $C^{l_n}_{(j,i,k)}$, $C^{l_n}_{(j-1,i,k)}$, $C^{l_n}_{(j+1,i,k)}$, ..., $C^{l_n}_{(j,i,k-1)}$ положительны. Шаги пространственно-временной сетки выбираются из условия устойчивости [3].

Для решения уравнения (3) необходимо прежде всего решить геофильтрационную задачу. Так как процессы загрязнения протекают длительное время, процесс фильтрации можно считать стационарным. Для условий Араратской равнины [4] скоростью испарения с поверхности грунтовых вод ($A \cdot 10^{-5}$ *м/сут*) по сравнению со скоростью фильтрации ($A \cdot 10^{-2} \div A \cdot 10^{-1}$ *м/сут*) можно пренебречь.

Кроме того, для решения (3) необходимо также иметь значения коэффициента конвективной диффузии D и активной пористости m. Для практических расчетов молекулярной диффузией можно пренебречь [5], т. е. считать коэффициент диффузии $D = \alpha v$.

Определение независимых переменных произведено по π — теореме [6]. Для функции $C = C(x, y, z, t, m, v, D)$

$$\left.\begin{array}{l} \pi_i = R^{x_i} v^{y_i} t/m, \\ [0] = M^{x_1} \cdot M^{y_1} \cdot C^{-y_1} \cdot C^1, \end{array}\right| \begin{array}{l} x_1 + y_1 = 0, \quad y_1 = 1, \quad x_1 = -y_1 = -1, \\ -y_1 + 1 = 0, \quad \pi_1 = \dfrac{v \cdot t}{Rm} = S. \end{array} \qquad (4)$$

Аналогично решаем и для других переменных. Полученные независимые переменные имеют вид:

$$\overline{C} = \frac{C_i - C_n}{C_0 - C_r}; \quad Pe = \frac{Rv}{Dm}; \quad S = \frac{vt}{Rm}; \quad \overline{H} = \frac{z}{H}. \qquad (5)$$

где $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$; H — осредненный уровень грунтовых вод после его установления.

Пример. По площади прямоугольника $ABCD$, находящегося на поверхности, поступает загрязнение с концентрацией C_0 в грунтовые воды с начальной концентрацией C_r ($C_0/C_r > 1$). Участок окружен совершенным горизонтальным дренажем, является прямоугольником (в частности, квадратом) $b_2 = l_2$, $L_1 = L_2$, а грунт однородный. Для получения обобщенных значений при решении нами взяты три параметра α ($\alpha_1 = 0{,}1$ *м*, $\alpha_2 = 1$ *м*, $\alpha_3 = 2{,}5$ *м*) и m ($m_1 = 0{,}9$, $m_2 = 0{,}45$, $m_3 = 0{,}7$). Приводится прогноз гидрохимического состава грунтовых вод под влиянием инфильтрации загрязняемых вод при следующих условиях: T, H_n, где T — мощность покровной толщи грунта; H_n — начальный уровень грунтовых вод.

Граничные условия:

$\frac{\partial C}{\partial n_1} = 0$ — граничное условие II-го рода для всех точек граничных плоскостей, за исключением точек, принадлежащих поливному участку ($k = 5$, $j = i = 1 \div 6$); n_1 — нормаль к граничной плоскости; $C = C_0$ — граничное условие I-го рода для точек поливного участка ($k = 5$, $j = i = 1 \div 6$).

Начальные условия:

$$t = t_0 = 0, \quad C = C_e$$

для точек ($k = 1 \div 4$, $j = i = 1 \div 9$), ($k = 5$, $j = i = 7 \div 9$).

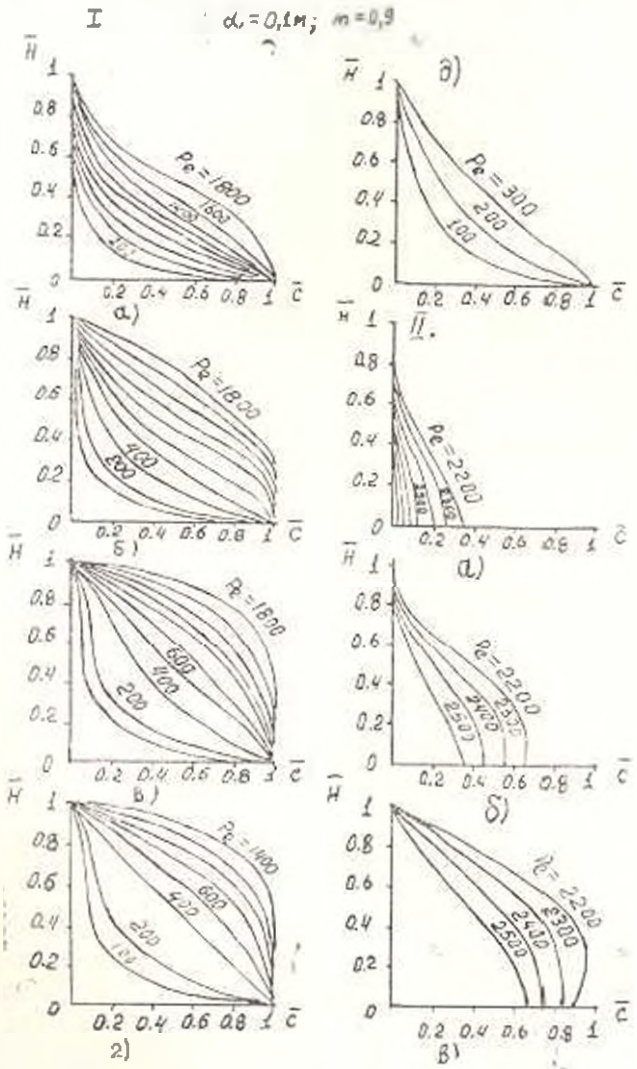

Рис. 3. Графики зависимости $C = C(\overline{H}, S, Pe)$. I, II — для подконтурных и законтурных точек. а) $S = 0.1$. б) $S = 0.2$; в) $S = 0.3$; г) $S = 0.4$; д) $S = 0.5$.

Для решения стационарной геофильтрационной задачи можно применить метод ЭГДА и свести прямоугольную область к осесимметричной, т. е. линия одинаковых скоростей на $\overline{H} = \text{const}$ будет иметь вид окружности. На основе решенной геофильтрационной задачи, имея поле скоростей, можем приступить к решению задачи массопереноса.

Результаты решения приведены в графическом виде для случая $\alpha_1 = 0{,}1$ *м*, $m_1 = 0{,}9$ (рис. 3). Аналогично получены результаты и для $\alpha_1 = 0{,}1$ *м*, $\alpha_2 = 1$ *м*, $\alpha_3 = 2{,}5$ *м*, $m_1 = 0{,}9$, $m_2 = 0{,}45$, $m_3 = 0{,}7$.

Для определения концентрации $\overline{C}$ на данной глубине $\overline{H}$ задаемся параметром Pe. Для данного момента времени t, имея значение S, можем определить концентрацию $\overline{C}$ в любой точке для $\overline{H} = \text{const}$. Имея значение $Pe = \frac{vR}{Dm} = \frac{R}{\alpha m}$, можно рассчитать $R = \alpha m Pe$, т. е. радиус той окружности на глубине $\overline{H}$, на которой наблюдается данная концентрация $\overline{C}$. Точки, находящиеся в пространстве непосредственно под контуром участка (подконтурные точки), и точки, находящиеся за контуром (законтурные точки), изменяются по различным закономерностям.

Эти кривые, полученные для данной схемы при данном m_1, можно использовать и для других значений m. Для этого достаточно рассчитать значения $S_2 = S_1 \frac{m_1}{m}$ при $Pe_2 = Pe_1$ и смотреть на соответствующем графике, или же, что то же самое, $Pe_2 = Pe_1 \frac{m_1}{m}$ при $S_2 = S_1$.

Выводы. По полученным графикам можно прогнозировать гидрохимический состав грунтовых вод в пространстве и во времени при площадной схеме загрязнения однородного грунта, окаймленного на расстоянии совершенным горизонтальным дренажем. Полученные зависимости могут быть использованы для расчетов и при других параметрах активной пористости посредством пересчета по указанным выше зависимостям.

ЕрПИ им. К. Маркса

Поступило 18.III.1981

Մ. Ա. ՏԱՐԱԿՑՅԱՆ

ՆՅՈՒԹԱՓՈԽԱՆՑՄԱՆ ՏԱՐԱԾԱԿԱՆ ԽՆԴԻՐԻ ՄԱՍԻՆ ՍՏՈՐԳԵՏՆՅԱ ՋՐԵՐԻ ԱՂՏՈՏՄԱՆ ԴԵՊՔՈՒՄ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Ստացված գրաֆիկներով կարելի է տալ գրունտային ջրերի հիդրոքի-միական կազմի փոփոխությունը ժամանակի և տարածության մեջ համասեռ

դրունտի մակերեսային աղտոտման դեպքում, երբ միջավայրը շրջապատված է հորիզոնական դրենաժով։ Ստացված կախվածությունները կարող են գործածվել նաև ուրիշ ակտիվ ծակոտկենությունների համար։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Веригин Н. Н.* Некоторые вопросы химической гидродинамики, представляющие интерес для мелиорации и гидротехники. «Известия АН СССР. ОТН», 1953, № 10.
2. *Левич В. Г.* Физико-химическая гидродинамика. М., Физматгиз, 1959, 699 с.
3. *Рихтмайер Р., Мортон К.* Разностные методы решения краевых задач. М., «Мир», 1972, 418 с.
4. Под ред. *Мкртчяна С. С.* Геология Армянской ССР. Том VIII. Гидрогеология. Ереван, Изд. АН АрмССР, 1974, 390 с.
5. *Барон В. А., Планин Ю. Г.* Прогноз многолетнего режима минерализации поровых вод при орошении. М., «Недра», 1971, 83 с.
6. *Алибужев П. М., Минкевич Л. М.* Основы теории подобия и моделирования. Новосибирск, Сиб. отд. АН СССР, Ин-т горн. дела, 1965, 83 с.