

В. А. АВАКЯН

МОДЕЛЬ ВИБРАЦИИ ПРЯМОЗУБОЙ  
 ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПЕРЕДАЧИ  
 ПРИ НАЛИЧИИ УДАРА В ЗАЦЕПЛЕНИИ

Задача обеспечения допустимых уровней шумов станков, нормируемых ОСТ2 П89-10-75, требует разработки мер по выявлению источников повышенных шумов и их устранению. Одним из таких является виброакустическая диагностика дефектов, позволяющая эффективно решать задачу обнаружения и выявления источников вибраций на основе математических моделей виброакустики зубчатых зацеплений.

Из многочисленных конструктивных, технологических и эксплуатационных параметров, влияющих на вибросостояние зацепления, существенное влияние оказывают неточности изготовления зубчатых колес [1]. Рассмотрим математическую модель удара в зацеплении цилиндрических зубчатых колес, возникающего при малых нагрузках и дефектах, приводящих к нарушению шага зацепления.

Каждый зуб шестерни и колеса в зацеплении при угле зацепления  $\varphi_2 = \omega_{ш} t$ , где  $\omega_{ш}$  — круговая частота вращения шестерни (рис. 1), обладает силовой характеристикой, соответственно,  $F_{ш}(\varphi_2)$  и  $F_k(\varphi_2)$ , проявляющейся в зоне зацепления протяженностью  $\varphi_{ш} = \varphi_k$ .

Следует установить зависимость спектров вибрации по датчикам в направлениях  $x$  и  $y$  от характеристик дефектов зацепления.

Поскольку пятна контакта зубьев шестерни и колеса при ударе почти точечные (в плоскости  $xo/y$ ), их можно рассматривать как  $\delta$ -функции. Тогда взаимодействие зубьев может быть охарактеризовано произведением площадей  $F_{ш} \times F_k$ , причем, для оценки соотношения амплитуд спектральных составляющих важен только относительный масштаб этих величин [2].

В общем случае взаимодействие зубьев в зацеплении для каждого момента времени при угле зацепления  $\varphi_2$  в комплексной плоскости  $xo/y$  (рис. 1) по аналогии с подшипниками [2] можно представить в виде:

$$\begin{aligned}
 F(t) &= \int_0^{\varphi_{ш}} F_{ш}(\varphi_2) \cdot F_k(\varphi_2) e^{i\omega_{ш} t} d\varphi_2 = \int_0^{\varphi_{ш}} F_{ш}(\varphi_2) \cdot F_k(\varphi_2) e^{-i\omega_{ш} t} d\varphi_2 \dots = \\
 &= L \{F_{ш}(\varphi_2) \cdot F_k(\varphi_2)\}_{\omega_{ш} \dots}
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

т. е. как Лапласово  $L$  — преобразование произведения силовых характеристик зубья шестерни  $F_w(\varphi_2)$  и колеса  $F_k(\varphi_3)$  при параметре  $s = -j$ . Такое представление возможно, поскольку функции  $F_w(\varphi_2)$  и  $F_k(\varphi_3)$  существуют только в пределах  $\varphi_{11} = \varphi_1$  и от перехода к пределу  $0 + \infty$  интеграл не изменится и будет сходиться при параметре  $s = -j$ .

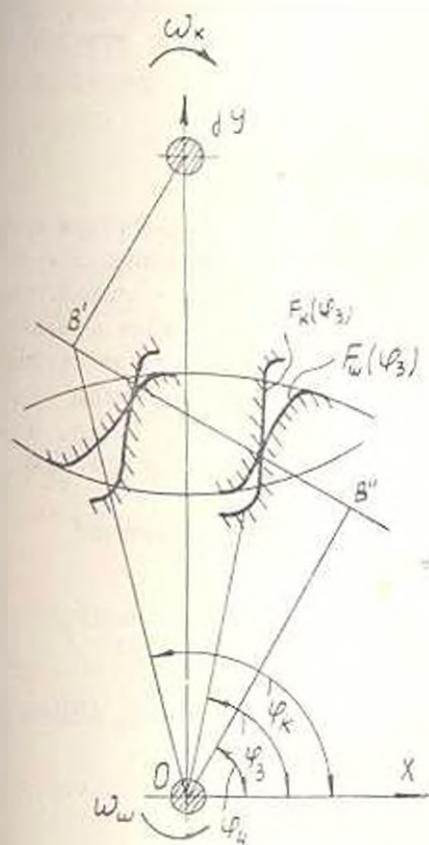


Рис. 1.

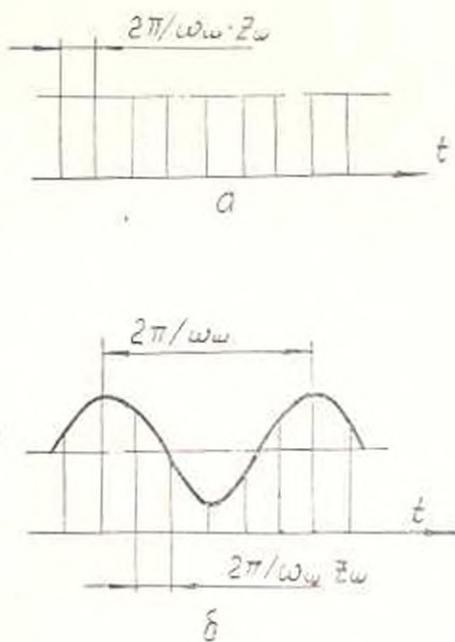


Рис. 2.

Ниже рассмотрен простой характер силовых взаимодействий — начало сопряжения каждой пары зубьев сопровождается ударом (нарушен шаг зацепления). При этом появится последовательность импульсов с зубцовой частотой  $f_z = \omega_w z_w$ , где  $z_w$  — число зубьев шестерни (рис. 2а). Совокупность импульсов ударов можно представить в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} \delta(t - nT) \quad (2)$$

и при модуляции (2) силами, обусловленными дефектным зацеплением, переменную часть силы зацепления можно записать:

$$F(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT), \quad (3)$$

где  $F(\varphi)$  — модулирующая переменная сила;  $\delta(t)$  — дельта функция;  $T$  — период соударения зубьев;  $n = 1, 2, 3, \dots$  — целые положительные числа.

Обычное преобразование Лапласа непрерывной функции  $F(\varphi)$ , модулирующей периодическую последовательность импульсных функций (3), можно представить как дискретное преобразование решетчатой функции [3].

$$L\{f^*(s)\} = D\{F(nT)\} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-snT} \cdot F(nT). \quad (4)$$

Рассмотрим взаимодействие ударных воздействий с дефектом вида биения одного из зацепляющихся колес (шестерни) при допущении, что другое колесо бездефектное. При этом периодическая последовательность импульсов будет подвергаться амплитудной модуляции функцией  $\Delta \cdot \sin(\omega_m t + \varphi_0)$ , где  $\Delta$  — величина биения, характеризующая глубину модуляции,  $\varphi_0$  — начальная фаза. В этом случае вектор силы будет представляться набором векторов на несущей частоте  $k\omega_m z_m$  и на верхних и нижних боковых частотах  $k\omega_m z_m \pm m\omega_m$ , где  $k = 1, 2, 3, \dots$ ,  $m = 1, 2, 3, \dots$  — номера гармоник.

Для несмещенной решетчатой функции введем обозначения: номера отсчетов

$$n = \bar{t} = \frac{t}{2\pi/z_m \cdot \omega_m} = \frac{t}{\omega_m} \cdot \omega_m, \quad (5)$$

где  $\bar{\omega} = 2\pi/z_m$  — период повторения (частота) решетчатой функции;  $\bar{t}$  — безразмерное дискретное время.

Безразмерная частота дефекта будет

$$\bar{\omega} = \omega_m \cdot \frac{2\pi}{z_m \cdot \omega_m} = \frac{\omega_m}{\omega_m}. \quad (6)$$

С учетом (5) и (6) можно написать

$$\sin(\omega t + \varphi_0) = \sin(\bar{\omega} \bar{t} + \varphi_0). \quad (7)$$

Тогда (4) может соответствовать силе  $\bar{F}(t)$  по (1) при параметре  $s = j\bar{\omega}$ , т. е. (4) следует представить как

$$\bar{F}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-j\bar{\omega} n} \cdot F(nT) = D\{F(nT)\}_{s=j\bar{\omega}}. \quad (8)$$

Используя правила прямого  $D$ -преобразования и таблицы изображения решетчатых функций [4], с учетом (5) ÷ (7) из (8) при относительном периоде дискретизации, равной 1 ( $T = 1$ ), получим

$$F(t) = \Delta \cdot \frac{e^{2j\bar{\omega}n} \cdot \sin \varphi_0 + e^{j\bar{\omega}n} \cdot \sin(\bar{\omega} - \varphi_0)}{e^{2j\bar{\omega}n} - 2e^{j\bar{\omega}n} \cdot \cos \bar{\omega} + 1} \quad (9)$$

При допущениях, сделанных выше, решетчатая функция (4) при четном количестве зубьев шестерни  $z_m$  является симметричной, с периодом, равным  $z_m$ . Тогда значения комплексных амплитуд четных гармоник ряда Фурье периодической симметричной решетчатой функции равны нулю [4]. Нечетные гармоники этой функции с полупериодом  $N = z_m/2$  (рис. 26), для которых  $f(n + N) = -f(n)$ , равны:

$$C_k = \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \Delta_k \cdot \sin(k\bar{\omega}n + \varphi_k) \cdot e^{-j\bar{\omega}n} \quad (10)$$

где  $k$  — номер гармоники.

Преобразуя (10) и применив формулу суммы геометрической прогрессии с учетом, что  $\bar{\omega}z_m = 2\pi$ , получим:

$$C_k = \frac{2\Delta_k}{jz_m} \cdot e^{j\varphi_k} - \frac{2\Delta_k}{jz_m} \cdot e^{-j\varphi_k} \left( \frac{1 - e^{jkz_m}}{1 - e^{2j\bar{\omega}z_m/z_m}} \right) \quad (10a)$$

При  $k \neq N$  вторая часть (10a) = 0 и

$$C_k = \frac{2\Delta_k}{jz_m} \cdot e^{j\varphi_k} \quad (11)$$

Выражение в скобке в (10a) из себя представляет неопределенность типа  $\frac{0}{0}$  после раскрытия которой комплексная амплитуда  $N$ -ой гармоники получится равной

$$C_N = \frac{2\Delta_N}{jz_m} \cdot \left( e^{j\varphi_N} - \frac{z_m}{2} \cdot e^{-j\varphi_N} \right) \quad (12)$$

При нечетном  $z_m$  выражение комплексных амплитуд (10) принимает следующий вид:

$$C_k = \frac{2}{2N+1} \sum_{n=0}^{2N} \Delta_k \cdot \sin(k\bar{\omega}n + \varphi_k) \cdot e^{-j\bar{\omega}n}$$

решение которого с учетом, что  $2N+1 = z_m$  при  $k \leq N$ , приводит к результату (11).

Таким образом, представляя зацепление зубьев колес как дискретный процесс, по (11), (12) можно определить комплексные амплитуды силы зацепления.

Переход к комплексному спектру вибрации осуществляется умножением комплексных амплитуд силы на передаточную функцию коробки скоростей (редуктора)

$$z_k = |W(f_{\omega_k})| \cdot e^{\pm \arccos W(f_{\omega_k})} \cdot C_{k,z} \cdot e^{\pm j \omega_k z}$$

где  $\omega_k = k\omega_m \cdot z_m$ .

Наличие дефекта не только на зубьях шестерни, но и колеса в рассматриваемом случае не вносит дополнительных частот в спектр вибраций. Наменьшению подвергнутся значения амплитуд вибрации, которые следует рассматривать уже с учетом парных воздействий дефектных зубьев шестерни и колеса.

Наличие дефекта колеса в виде биения приведет к изменению частотного состава спектра вибрации. К вышеуказанным следует добавить частоты боковых составляющих, которые появятся в спектре в результате амплитудной модуляции несущей на частоте  $\omega_m z_m = \omega_k \cdot z_k$  частотой вращения колеса  $\omega_m$  ( $z_k$  число зубьев колеса) их величины рассчитываются по выражениям  $k\omega_k z_k \pm p\omega_k$ , где  $p = 1, 2, 3, \dots$  — номера гармоник. При наличии биения шестерни и колеса одновременно в спектре могут появиться составляющие и на частотах  $k\omega_k z_k \pm m\omega_m \pm p\omega_k$  [5].

Вышеприведенные положения неоднократно подтверждались экспериментальными исследованиями [5].

ИПО «Армгепанок»

Поступило 27. XII 1979

Վ. Ա. ԱՎԻՅԱՆ

ՈՒՎՂԱՏԱՐԻ ԳԼԱՆԱԿԱՆ ԱՏԱՄԱՆՎՈՐ ԶՈՒՅԳԻ ԹՐԹՈՄԱՆ  
ՄՈՒՅԵՐԸ ՀԱՐՎԱԾՆԵՐՈՎ ԿԱՌՉՄԱՆ ԿԵՊԳՈՒՄ

Ա Վ Ր Ն Ր Ո Ւ Մ

Կրթական է աստիճանի գույքի թրթումները հարվածներով կառման ղեկգրում: Հարցումի դիսկրետ վերափոխումների միջոցով բացահայտված է աստիճանի գույքի թրթուման սպիկտրի կապը պարտությունան սխալի մեծությունը:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Brady William A. How to design noise out of gears. „Machine Design“, 1973, 45, № 30.
2. Бронман Я. С., Демирчян К. С., Шмугер С. Я. Модель вибрации асинхронного электродвигателя. «Известия АН АрмССР (серия Т. II)», т. XXV, № 3, 1972.
3. Цыкин Я. Э. Основы теории автоматических систем. М., «Наука», 1977.
4. Цыкин Я. Э. Теория линейных импульсных систем. М., «Физматгиз», 1963.
5. Авакян В. А., Мамонтов В. Р., Налля Г. А. Выявление источников повышенного шума свайков способом вибродиагностики. «Станки и инструменты», 1979, № 3.