

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА

О. В. ЛЕОНОВ

НЕКОТОРЫЕ ТОЧНОСТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ
 ЗНАКОВЫХ КОРРЕЛЯТОРОВ

При измерении коэффициента корреляции знаков по реализациям конечной длины измеряется не точное значение коэффициента, а некоторая его оценка R , являющаяся случайной величиной. Близость оценки действительному коэффициенту корреляции определяется ее дисперсией, которую можно вычислить двояко. В силу того, что коэффициент корреляции знаков является математическим ожиданием некоторой случайной величины z [1], его дисперсия может быть определена согласно [2]:

$$\sigma_R^2 = \frac{2}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) B_z(\tau) d\tau, \quad (1)$$

где σ_R^2 — дисперсия оценки коэффициента корреляции знаков \tilde{R} ; T — интервал наблюдения; $B_z(\tau)$ — корреляционная функция процесса z .

Другая возможность определения дисперсии такова. Из закона больших чисел следует, что если математическое ожидание некоторой случайной величины определяется по N независимым замерам, то дисперсия математического ожидания связана с дисперсией случайной величины зависимостью:

$$\sigma_z^2 = \frac{1}{N} \sigma_z^2.$$

Количество независимых замеров вычисляется по известному времени наблюдения и интервалу, через который можно считать независимыми производимые замеры. Более точно, чем через полную пропускания, длительность этого интервала оценивается временем корреляции. Его определение для оценки шага квантования по времени непрерывной реализации сводится к соотношению

$$\tau_c = \int_0^T |K_z(\tau)| d\tau.$$

где $K_z(\tau)$ — нормированная корреляционная функция процесса. Имея τ_k , можно определить дисперсию измеряемого коэффициента корреляции

$$\sigma_{R'}^2 = \frac{\sigma_z^2}{T/\tau_k} = \frac{\sigma_z^2}{T} \int_0^T |K_z(\tau)| d\tau. \quad (2)$$

Очевидно, что дисперсия, вычисленная по выражению (1), будет более точной, т. к. нельзя с полным основанием утверждать, что замеры, разделенные временем $\Delta t = \tau_k$, являются абсолютно статистически независимыми. С этой точки зрения представляет интерес вычисление дисперсий по обоим выражениям с последующим сравнением полученных результатов.

Так как z представляет из себя преобразованную фазу смеси гармонического сигнала с нормальным шумом, дисперсия z , а следовательно, и дисперсия R , будет зависеть от отношения сигнал-шум и достигать максимального значения при приеме только шума ($S = 0$). Этот случай, представляющий наибольший интерес, будет рассмотрен в дальнейшем, т. к. он позволяет оценить максимально возможную ошибку при измерении коэффициента корреляции знаков.

Корреляционная функция процесса z и его коэффициент корреляции согласно [3] имеют следующий вид:

$$B_z(\tau) = \frac{32}{\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} a_k R_0^{2k-1}; \quad (3)$$

$$K_z(\tau) = \frac{96}{\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} a_k R_0^{2k-1}. \quad (4)$$

Здесь

$$a_k = f(n=0; m=k) + f(n=1; m=k-1) + \dots \\ \dots + f(n=k-1; m=1) - f(n=0; m=k-1) - \\ - f(n=1; m=k-2) - \dots - f(n=k-2; m=1),$$

где

$$f(n, m) = \frac{[2[(n+m)-1]!]^2}{2^{2(n+m)} \cdot n! \cdot (2m+n-1)! (2m-1)!}$$

Там же даются значения десяти коэффициентов a_k , позволяющие с высокой точностью вычислить корреляционную функцию при заданном R_0 , который зависит от типа фильтра, на выходе которого ведется измерение коэффициента корреляции знаков, и определяется выражением:

$$R_0(\tau) = \sqrt{R_c^2(\tau) + R_s^2(\tau)}.$$

При представлении стационарного нормального шума на выходе узкополосной системы в виде суммы косинусной и синусной составляющих

со случайными амплитудами, $R_c(\tau)$ — коэффициент корреляции, общий для амплитуд косинусной и синусной составляющих, а $R_s(\tau)$ — коэффициент взаимной корреляции тех же амплитуд [4]. Эти коэффициенты связаны с энергетическим спектром зависимостью:

$$R_c(\tau) = \frac{\int_0^{\infty} F(\omega) \cos(\omega - \omega_0)\tau d\omega}{\int_0^{\infty} F(\omega) d\omega}; \quad (5)$$

$$R_s(\tau) = \frac{\int_0^{\infty} F(\omega) \sin(\omega - \omega_0)\tau d\omega}{\int_0^{\infty} F(\omega) d\omega}, \quad (6)$$

где $F(\omega)$ — энергетический спектр; ω_0 — резонансная частота.

Подставив выражения (3) и (4) в (1) и (2), соответственно, для дисперсий получим:

$$\sigma_{\frac{z}{R}}^2 = \frac{64}{\pi^3} \frac{1}{T} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_0^T \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) R_0^{2k-1}(\tau) d\tau; \quad (7)$$

$$\sigma_{\frac{z}{R}}^2 = \frac{32}{\pi^3} \frac{1}{T} \int_0^T \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k R_0^{2k-1}(\tau) \right| d\tau. \quad (8)$$

Для проведения дальнейших сравнений следует задаться конкретным типом фильтра. Положим, что имеем фильтр типа колебательного контура и энергетический спектр шума симметричен относительно его центральной частоты ω_0 . Энергетический спектр на выходе фильтра определяется выражением:

$$F(\omega) = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + (\omega - \omega_0)^2},$$

где α — постоянная, определяемая параметрами элементов фильтра.

Вычисление $R_c(\tau)$ и $R_s(\tau)$ даст:

$$R_c(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}, \quad R_s(\tau) = 0.$$

Следовательно:

$$R_0(\tau) = R_c(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}.$$

Подставив полученное в выражения для дисперсий, будем иметь:

$$\sigma_{\frac{z}{R}}^2 = \frac{64}{\pi^2} \left[\frac{1}{\alpha T} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2k-1} - \frac{1}{(\alpha T)^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{(2k-1)^2} (1 - e^{-(2k-1)\alpha T}) \right]; \quad (9)$$

$$\sigma_{\frac{z}{R}}^2 = \frac{32}{\pi^2} \frac{1}{\alpha T} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2k-1}. \quad (10)$$

Проведем сравнение полученных выражений с ограничением рядов десятью членами.

Выражения (9) и (10) дают равные значения дисперсий ($\sigma_{\frac{z}{R}}^2 = \sigma_{\frac{z}{R}}^2 = 0,193$) при $\alpha T = 1,42$. При $\alpha T < 1,42$ имеет место $\sigma_{\frac{z}{R}}^2 < \sigma_{\frac{z}{R}}^2$. Выражение (9) при $\alpha T \rightarrow 0$ дает $\sigma_{\frac{z}{R}}^2 = \frac{1}{3} = \sigma_{\frac{z}{R}}^2$. Выражение (10) имеет смысл лишь до минимальных значений $T_{\min} = \tau_k$, чему соответствует $\sigma_{\frac{z}{R}}^2 = \frac{1}{3} = \sigma_{\frac{z}{R}}^2$ и $\alpha T = 0,83$.

При $\alpha T > 1,42$ очевидно должно иметь место обратное неравенство: $\sigma_{\frac{z}{R}}^2 > \sigma_{\frac{z}{R}}^2$. Для более наглядного сравнения дисперсий при больших αT вынесем первый член из квадратных скобок выражения (9):

$$\sigma_{\frac{z}{R}}^2 = \frac{64}{\pi^2} \frac{1}{\alpha T} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2k-1} \left[1 - \frac{1}{\alpha T} \frac{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{(2k-1)^2} (1 - e^{-(2k-1)\alpha T})}{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2k-1}} \right]$$

При достаточно больших αT второй член в квадратных скобках много меньше единицы, так что можно принять:

$$\sigma_{\frac{z}{R}}^2 = \frac{64}{\pi^2} \frac{1}{\alpha T} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2k-1}$$

Полученное значение дисперсии в два раза больше дисперсии $\sigma_{\frac{z}{R}}^2$: покажем это. Согласно выражению, приведенному в [2]:

$$\sigma_{\frac{z}{R}}^2 = \frac{2}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) B_z(\tau) d\tau = \frac{2\sigma_z^2}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) K_2(\tau) d\tau.$$

Второе равенство следует из того, что при приеме только шума математическое ожидание z равно нулю, и, следовательно,

$$K_2(\tau) = \frac{B_z(\tau) - z^2}{\sigma_z^2} = \frac{B_z(\tau)}{\sigma_z^2}.$$

Функция $K_2(\tau)$ положительна для всех τ , следовательно, $|K_2(\tau)| = K_2(\tau)$. С другой стороны, вследствие того, что T велико, при возрастании τ от 0 до ∞ функция $1 - \frac{\tau}{T}$ остается близкой единице в достаточно широких пределах изменения τ . Функция же $K_2(\tau)$ с возрастанием τ быстро монотонно убывает, стремясь к нулю. Следовательно, можно приближенно принять, что $K_2(\tau) \approx \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) \cdot K_2(\tau)$ и тогда:

$$\sigma_{\frac{z}{R}}^2 \approx \frac{2\sigma_z^2}{T} \int_0^T |K_2(\tau)| d\tau = 2 \frac{\sigma_z^2}{T^2} = 2\sigma_{\frac{z}{R}}^2.$$

Если не требуются высокие точности в вычислении дисперсии, то для длинных реализаций можно считать статистически независимыми замеры через время $\Delta t = 2\tau_k$ и определять дисперсию по выражению:

$$\sigma_{\frac{z}{R}}^2 = \frac{\sigma_z^2}{T^2} = \frac{64}{\pi^2} \frac{1}{2T} \sum_{k=1}^N \frac{a_k}{2k-1} \approx \frac{0,543}{2T}. \quad (11)$$

Погрешность в вычислении дисперсии согласно выражению (11) возрастает по мере уменьшения T . Выражение имеет смысл до $T_{\min} = 2\tau_k$.

Этому значению T соответствует $\sigma_{\frac{z}{R}}^2 = \frac{1}{3}$ и $2T = 1,63$. При данном

αT дисперсия, вычисленная по выражению (9), равна $\sigma_{\frac{z}{R}}^2 = 0,18$, т. е. дисперсии различаются почти в два раза. Полученные результаты свидетельствуют о том, что не следует пользоваться выражением (11) для вычисления дисперсии при малом αT .

Дисперсию можно выразить также и через ширину полосы пропускания системы, т. к. последняя однозначно связана с постоянной α . Связь между ними для взятого нами фильтра имеет вид:

$$\alpha = 4,8\Delta f,$$

где Δf — ширина полосы на уровне 0,7.

С учетом этого будем иметь:

$$\begin{aligned} \sigma_{\frac{z}{R}}^2 &= \frac{64}{4,8\pi^2} \left[\frac{1}{\Delta f T} \sum_{k=1}^N \frac{a_k}{2k-1} - \frac{1}{4,8(\Delta f \cdot T)^2} \times \right. \\ &\quad \left. \times \sum_{k=1}^N \frac{a_k}{(2k-1)^2} (1 - e^{-4,8(2k-1)\Delta f T}) \right]. \end{aligned} \quad (12)$$

Кривая зависимости $\sigma_{\frac{z}{R}}^2 = \sqrt{\frac{\sigma_z^2}{R}} = F(\Delta f \cdot T)$ представлена на рис. 1.

Полученная дисперсия позволяет определить точность измерения коэффициента корреляции знаков по реализациям конечной длины. Последнюю можно оценить доверительным интервалом $\pm \Delta R$, в который с заданной вероятностью β попадает измеренное значение коэффициента корреляции. Закон распределения оценки математического ожидания можно принять нормальным [5]. В этом случае вероятное отклонение измеренного \bar{R} от точного значения вычисляется по выражению:

$$\pm \Delta R = \pm t_{\beta} \sigma_{\bar{R}},$$

где $t_{\beta} = |2 \arg \Phi(\beta)|$; β — вероятность попадания в интервал; $\arg(\Phi)\beta$ — функция, обратная интегралу вероятностей.

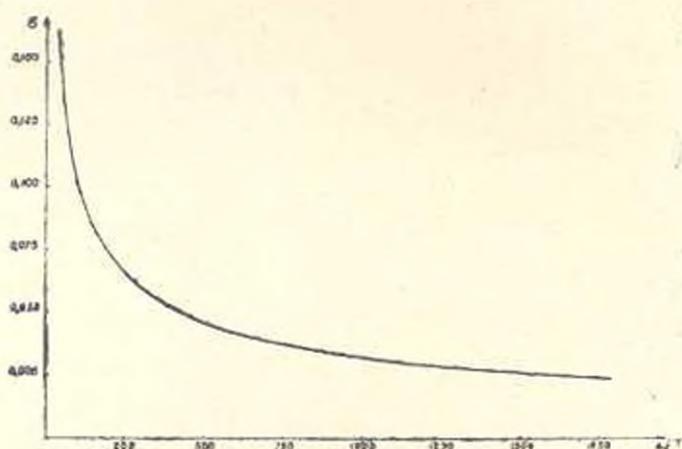


Рис. 1. Зависимость среднеквадратичного отклонения измеряемого коэффициента корреляции знаков от интервала наблюдения в полосы пропускания системы.

Значения функции $\Phi(\beta)$ даются в виде таблицы. Если задать $\beta > 0,999$, то t_{β} оказывается равным 3,3. Следовательно, событие, заключающееся в попадании \bar{R} в доверительный интервал шириной $2 \cdot \Delta R = 2 \cdot 3,3 \cdot \sigma_{\bar{R}}$, практически достоверно.

Перейдем к оценке точности в определении отношения сигнал—шум S и фазы φ сигнала по измеренным коэффициентам корреляции знаков. При слабых сигналах в [1] получены следующие зависимости:

$$R_1 = 0,5S \cos \varphi,$$

$$R_2 = 0,5S \sin \varphi,$$

где R_1 и R_2 — коэффициенты корреляции смеси и двух опорных сигналов, разнесенных по фазе на $\frac{\pi}{2}$.

Указанные зависимости позволяют определить S и ψ :

$$S = 2\sqrt{R_1^2 + R_2^2}; \quad (13)$$

$$\psi = \operatorname{arctg} \frac{R_2}{R_1}. \quad (14)$$

Отношение сигнал—шум S можно интерпретировать как модуль некоторого вектора \vec{S} с проекциями $S_r = S \cos \psi = 2R_1$ и $S_y = S \sin \psi = 2R_2$ с начальным углом ψ . При изменении R_1 и R_2 в пределах $-1 < R_{1,2} < 1$ конец вектора \vec{S} описывает окружность радиуса S . Будем считать, что отклонения обоих измеренных значений R_1 и R_2 лежат в пределах равных доверительных интервалов $\pm \Delta R$. В этом случае конец вектора \vec{S} может находиться в любой точке области, ограниченной квадратом со стороной $4\Delta R$. Центр квадрата лежит на окружности радиуса S (рис. 2). Задача оценки точности в вычислении

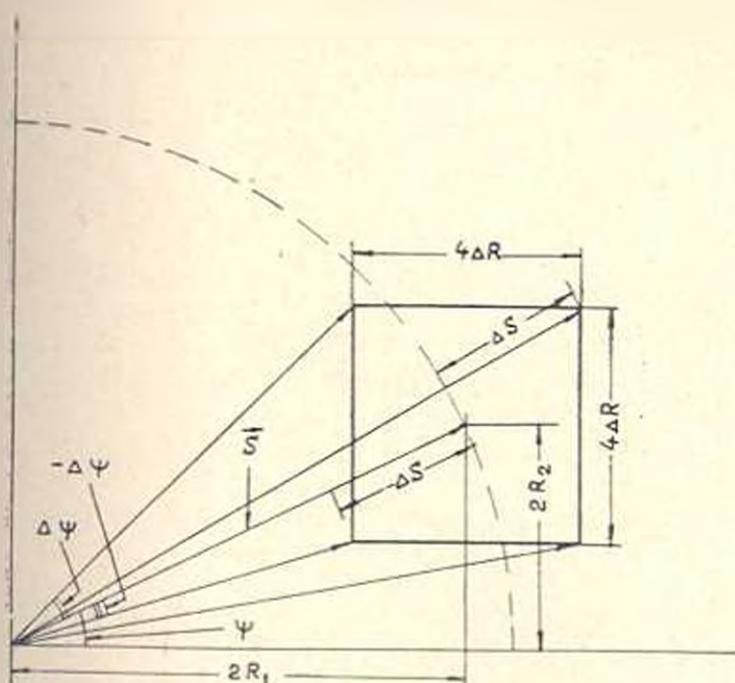


Рис. 2. Иллюстрация погрешностей, возникающих при определении отношения сигнал—шум смеси и фазы сигнала.

S и ψ по выражениям (13) и (14) сводится к определению максимальных из наибольших отклонений ΔS_{\max} , $-\Delta S_{\max}$, $\Delta \psi_{\max}$ и $-\Delta \psi_{\max}$ при изменении ψ в пределах $-\pi < \psi < \pi$. Наибольшие отклонения соответствуют скольжению конца вектора \vec{S} по периметру квадрата. Очевидно, для решения этой задачи достаточно провести анализ при

изменении ψ в пределах $0 \leq \psi \leq \pi/2$, т. к. далее картина будет повторяться.

Зависимости наибольших отклонений ΔS , $-\Delta S$, $\Delta\psi$ и $-\Delta\psi$ при изменении ψ в пределах от 0 до $\pi/2$, в предположении, что длина вектора \bar{S} больше диагонали квадрата, представлены на рис. 3 и 4. Максимумы наибольших отклонений отношения сигнал-шум достигаются при одном и том же угле $\psi = \pi/4$ и равны

$$\Delta S_{\max} = |-\Delta S_{\max}| = 2\sqrt{2}\Delta R.$$

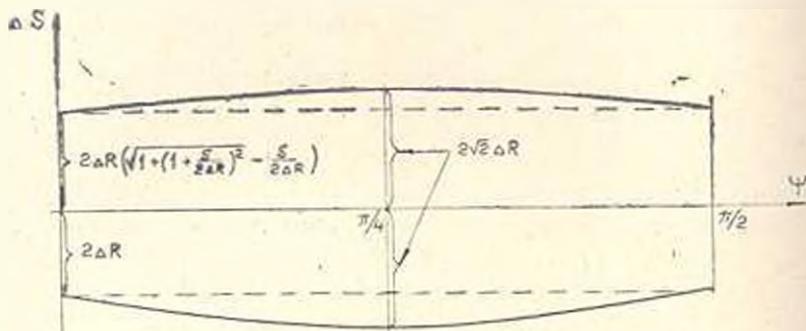


Рис. 3. Зависимость наибольших отклонений определяемого отношения сигнал-шум от фазы сигнала.

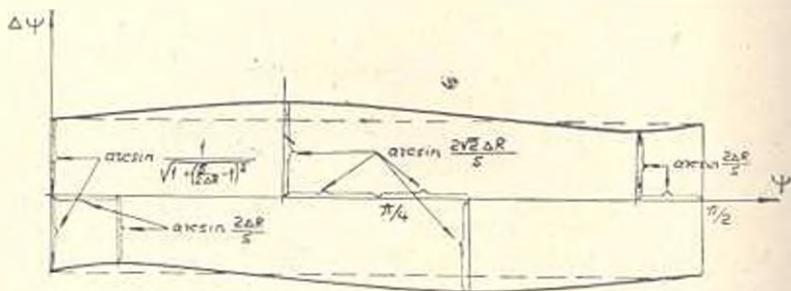


Рис. 4. Зависимость наибольших отклонений определяемой фазы сигнала от значений самой фазы.

Этого нельзя сказать относительно отклонений фазы. Здесь максимумы достигаются при углах $\psi_{1,2} = \frac{\pi}{4} \pm \arcsin\left(\frac{2\sqrt{2}\Delta R}{S}\right)$. Однако, для малых $\Delta R/S$, разность между $\Delta\psi_{\max}$, $-\Delta\psi_{\max}$ и значениями функций $\Delta\psi$ и $-\Delta\psi$ при угле $\psi = \pi/4$ мала.

Если обозначить максимальное относительное отклонение в определении S через $\delta = \Delta S_{\max}/S$, то оно будет связано с $\frac{\Delta R}{R}$ следующей зависимостью:

$$\delta = \frac{2\sqrt{2}\Delta R}{S} = \frac{2\sqrt{2} \cdot 3,3\frac{\Delta R}{R}}{S} = 9,33 \frac{\Delta R}{S}.$$

Максимальное значение наибольших отклонений фазы выразится через δ так:

$$\Delta\psi_{\max} = |-\Delta\psi_{\max}| = \arcsin\left(\frac{2|2\Delta R|}{S}\right) = \arcsin\delta.$$

Задаваясь допустимым максимальным относительным отклонением, можно найти среднеквадратичное отклонение $\frac{\Delta R}{R}$, а по нему и $\Delta f \cdot T$ для определенного данного S с заданной точностью. При этом оценивается и максимальная ошибка в определении фазы.

Можно задаться допустимым максимальным отклонением в определении фазы ($\Delta\psi_{\max}$) и найти $\Delta f \cdot T$, обеспечивающее при данном S отклонение не больше заданного. Если положим, требуется определить малые S (пусть $S \leq 0,5$) с относительной ошибкой не более 25% ($\delta \leq 0,25$), то необходимо обеспечить $\frac{\Delta R}{R} \leq 0,0134$ и $\Delta f \cdot T \geq 630$.

Ошибка в определении фазы при этом составит менее $\approx 14,5^\circ$.

Найденное значение величины $\Delta f \cdot T$ свидетельствует о том, что для достижения высоких точностей в определении S и ψ следует брать длительные интервалы наблюдения.

Полученные результаты следует применять только для слабых сигналов, когда отношение сигнал/шум меньше единицы.

ЕрIII им. К. Маркса

Поступило 25 II 1980

Ս. Վ. ԸՆՆՈՎ

ՆՇԱՆԱՅԻՆ ԿՈՐԵԼՅԱՏՈՐՆԵՐԻ ՃՇԳՐՏՈՒԹՅԱՆ ՈՐՈՇ ԲՆՈՒԹԱԿԵՐԵՐԸ

Ա մ փ ո փ ո ռ մ

Գտնված է նեղ շերտով նորմալ աղմուկի հետ խառնված հարմոնիկ ազդանշանի և այդ հարմոնիկի հաճախականությանը հիմնային ազդանշանի նշանի կորելացիայի գործակցի դիսկրետիայի առավելագույն արժեքը վերջավոր տևողությամբ շափումների դեպքում:

Քայլ ազդանշանների համար ստացված են արտահայտություններ, որոնք հնարավորություն են տալիս գնահատելու խառնուրդի ազդանշանաղմուկ հարաբերության և ազդանշանի ֆազի որոշման սխալը կորելացիայի գործակցի երկու շափումների օգնությամբ:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Бурнусзян Э. С., Леонов О. В. Об одном методе определения отношения сигнал-шум. «Радиотехника и электроника», т. XV, № 11, 1970.
2. Давенпорт В. Б., Рут В. Л. Введение в теорию случайных сигналов и шума. М., «Иностранная литература», 1960.
3. Бурнусзян Э. С., Аюбян С. А., Леонов О. В. К вопросу определения корреляционной функции преобразованных знаковых процессов. «Известия АН АрмССР (серия Т. II.)», т. XXVII, № 5, 1974.
4. Левин Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники. М., «Советское радио», 1966.
5. Венгцель Е. С. Теория вероятностей. М., Физматгиз, 1969.