ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Տեխնիկական գիտութ. սերիա XXIV, № 1, 1981 Серия технических наук

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА

С. Б. ОВАКИМЯН

ПРАВИЛА МАКСИМАЛЬНОГО ВЫРАВНИВАНИЯ В ЗАДАЧАХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ

1. *Постановка задачи.* Рассмотрим комплекс из n операций, выполняемых ресурсами одного вида в количестве $N(t)$ в момент t. Примем, что $N(t)$ кусочно-постоянная функции с разрывами в точках $T_1, T_2, \ldots, T_p$. Обозначим N_S значение $N(t)$ в интервале (T_{S-1}, T_S), $\Delta S = T_S - T_{S-1}$, $S = 1, 2, \ldots, P$. $(T_0 = 0)$.

Определим максимальный объем работ, который можно выполнить за заданное число интервалов T_q $(1 \leqslant q \leqslant P)$. Рассмотрим случай линейных зависимостей скоростей операций от количества ресурсов:

$$h_i(v_i) = \begin{cases} v_i, & \text{если } 0 \leqslant v_i \leqslant b_i, \\ b_i, & \text{если } v_i > b_i, \end{cases}$$

где b_i — максимально возможное количество ресурсов, которое можно выделить на выполнение i операций.

Введем переменные x_{iS} — объем i-ой операции, выполняемой в S-ом интервале. Для выполнения этого объема работ необходимы ресурсы в количестве $v_{iS} = \dfrac{x_{iS}}{\Delta_S}$.

Общее количество ресурсов, требуемое в S-ом интервале для выполнения работ в объемах $\{x_{iS}, i = 1, 2, \ldots, n\}$, равно $\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{x_{iS}}{\Delta_S}$ и не должно превышать N_S. Целевая функция имеет вид:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{S=1}^{q} x_{iS} \to \max \tag{1.1}$$

при ограничениях

$$\sum_{S=1}^{q} x_{iS} \leqslant w_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{1.2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{iS} \leqslant N_S \Delta_S, \qquad S = 1, 2, \ldots, q, \tag{1.3}$$

$$0 \leqslant x_{iS} \leqslant b_i \Delta_S, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \quad S = 1, 2, \ldots, q. \tag{1.4}$$

2. *Потоковая интерпретация и описание алгоритма.* Определим транспортную сеть со входом x_0, выходом Z, n вершинами x_i $(i=1, 2, \dots, n)$ и q вершинами y_S $(S=1, 2, \dots, q)$. Вершину x_0 соединим с каждой вершиной x_i дугой $(0, i)$ пропускной способности $c_{0i}=w_i$, а x_i — с каждой вершиной y_S дугой (i, S) пропускной способности $c_{iS}=b_i\cdot\Delta_S$. Наконец, каждую вершину y_S соединим с выходом Z с дугой (S, Z) пропускной способности $c_{SZ}=N_S\cdot\Delta_S$.

Определим поток $\{x_{0i}, x_{iS}, x_{SZ}\}$ максимальной величины в полученной транспортной сети. Эта задача эквивалентна (1.1)—(1.4). При этом $x_{0i}=\sum\limits_{S=1}^{q} x_{iS}$ равно объему выполненной части i-ой операции, а $x_{SZ}=\sum\limits_{i=1}^{n} x_{iS}$ — объему работ, выполненных в S-ом интервале.

Для решения задачи о максимальном потоке существует алгоритм Форда—Фалкерсона [1]. Однако специфика сети позволяет предложить существенно более эффективный алгоритм, в основе которого лежит процедура последовательного формирования потоков по дугам. В основе процедуры лежит правило максимального выравнивания остаточных уровней ресурсов (правило МВ)

$$M_{i,S}=N_S-\frac{1}{\Delta_S}\sum_{j=1}^{i-1} x^0_{jS}. \tag{2.1}$$

Потоки x^0_{iS}, полученные по этому правилу, должны удовлетворять следующему условию: если для каких-либо двух интервалов S и l имеет место $M_{iS}>M_{il}$, то имеет место либо $x_{iS}=b_i\cdot\Delta_S$, либо $x_{il}=0$. Из этого условия следует простой алгоритм определения потоков x^0_{iS} по правилу МВ. Зададимся некоторым значением уровня $0<\delta_i<\max\limits_{S} M_{i-1,S}$.

Определим x_{iS} согласно выражению

$$x_{iS}=\begin{cases} 0 & \text{если } M_{i-1,S}<\delta_i, \\ (M_{i-1,S}-\delta_i)\Delta_S, & \text{если } M_{i-1,S}-b_i<\delta_i<M_{i-1,S}, \\ b_i\cdot\Delta_S, & \text{если } \delta_i<M_{i-1,S}-b_i. \end{cases} \tag{2.2}$$

Заметим, что при $\delta_i=\max\limits_{S} M_{i-1,S}$ из (2.2) следует, что все $x_{iS}=0$, а при $\delta_i=0$ — $x_{iS}=\Delta_S\min(b_i, M_{i-1,S})$. Если $\sum\limits_{S}\Delta_S\min(b_i, M_{i-1,S})\leqslant w_i$, то $x^0_{iS}=\Delta_S\min(b_i, M_{i-1,S})$. Если же $\sum\limits_{S}\Delta_S\min(b_i, M_{i-1,S})>w_i$, то существует $\delta^0_i>0$, такое, что $x_{iS}(\delta^0_i)$, определяемая формулами (2.2), удовлетворяет условию

$$\sum_{S=1}^{q} x_{iS}(\delta^0_i)=w_i \tag{2.3}$$

в силу того, что $x_{iS}(\delta_i)$ непрерывные возрастающие функции δ_i. В этом случае: $x^0_{iS} = x_{iS}(\delta^0_i)$. Таким образом, задача определения потоков x_{iS} на i-ом шаге алгоритма сводится к определению одной переменной уровня δ_i и заключается в решении линейных уравнений с одним переменным.

3. *Применение правила МВ на примере.* Рассмотрим комплекс из 4 операций, данные о которых приведены в таблице $\left(\tau_i = \frac{w_i}{\delta_i}\right)$:

i	1	2	3	4
τ_i	3	2	4	5
δ_i	6	5	4	2
w_i	18	10	16	10

Данные об уровнях ресурсов имеют вид:

S	1	2	2	4
Δ_S	2	3	2	3
N_S	5	7	10	6
$c_S = \Delta_S \cdot N_S$	10	21	20	18

Сначала определим оценку снизу для продолжительности комплекса. Для этого определим сумму объема всех операций $w_s = \sum_{i=1}^{n} w_i = 54$. За первые три интервала можно выполнить работы в объеме не более $\sum_{1}^{3} N_S\Delta_S = 51$. Выполнение остающегося объема 3 в четвертом интервале потребует не менее $\frac{3}{N_4} = \frac{1}{2}$, поэтому оценка продолжительности комплекса: $T_{\min} = 7\frac{1}{2}$. Проверим, возможно ли выполнение комплекса за это время, применяя правило МВ. На рис. 1 приведен график $N(t)$.

I шаг. Рассматриваем первую операцию объема $w_1 = 18$. Из рис. 1 следует, что при уровне $\delta_1 = 7$ только $x_{13} = (N_3 - \delta_1)\cdot\Delta_3 = 6 > 0$, остальные $x_{1S} = 0$, а при $\delta_1 = 6$ имеем $x_{12} = 3$, $x_{13} = 8$, остальные $x_{1S} = 0$. При $\delta_1 = 5$, имеем $x_{12} = (N_2 - \delta_1)\cdot\Delta_2 = 6$, $x_{13} = (N_3 - \delta_1)\cdot\Delta_3 = 10$, $x_{14} = (N_4 - \delta_1)\Delta_4 = 0.5$. Так как $x_{12} + x_{13} + x_{14} = 16,5 < 18$, то $\delta_1 \leqslant 5$. Пусть $\delta_1 < 5$, тогда:

$$x_{11} = (N_1 - \delta_1)\,\Delta_1 = (5 - \delta_1)\cdot 2;$$

$$x_{12} = (N_2 - \delta_1)\,\Delta_2 = (7 - \delta_1)\cdot 3;$$

$$x_{13} = (N_2 - \delta_1)\,\Delta_3 = (10 - \delta_1)\cdot 2;$$

$$x_{14} = (N_3 - \delta_1)\,\Delta_4' = (6 - \delta_1)\cdot \frac{1}{2}\,.$$

Складывая и приравнивая $w_1 = 18$, получаем $\delta_1 \approx 4{,}8$ н, следовательно: $x_{11} = 0{,}4$; $x_{12} = 6{,}6$; $x_{13} = 10{,}4$; $x_{14} = 0{,}6$.

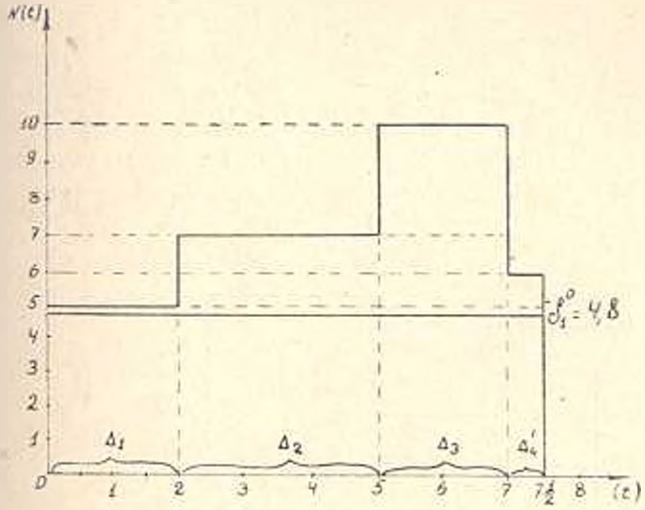

Рис. 1.

II шаг. Поскольку уровни ресурсов $M_{1s} = 4{,}8$ для всех s, то для остальных операций получаем задачу оптимизации при постоянном уровне ресурсов. Ее решение, как показано в [2]:

$$x_{is} = \delta_s w_i \cdot \Delta_s;$$

где

$$\delta_S = \frac{M_{1S}}{\sum\limits_{i=2}^{4} w_i} = \frac{4{,}8}{36} = \frac{2}{15}\,, \qquad i = 2,\ 3,\ 4; \qquad S = 1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

Ответ решения удобно привести в виде таблицы значений:

i \ S	1	2	3	4
1	0,4	6,6	10,4	0,6
2	$2\frac{2}{3}$	4	$2\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
3	$4\frac{4}{15}$	$6\frac{2}{5}$	$4\frac{4}{15}$	$1\frac{1}{15}$
4	$2\frac{2}{3}$	4	$2\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$

4. *Обоснование алгоритма.* Теорема. Алгоритм распределения ресурсов, основанный на правиле МВ, дает оптимальное решение задачи.

Доказательство. Рассмотрим график N_s, показанный на рис. 2 сплошной линией и график $M_{i-1, s}$, показанный пунктиром. Очевидно, что поток на i-ом шаге алгоритма будет максимальным, если площадь, лежащая ниже двойной линии и выше графика $M_{i-1, s}$, будет минимальной (эта площадь заштрихована на рис. 2). Из этого следует, что на каждом из предыдущих шагов алгоритма необходимо, в первую очередь, использовать ресурсы, «лежащие выше» уровня b_i. Так как уровень b_i может быть любым, то следовательно, в первую очередь следует использовать ресурсы в интервалах с максимальными остаточными уровнями ресурсов, причем, это правило справедливо для любого шага алгоритма.

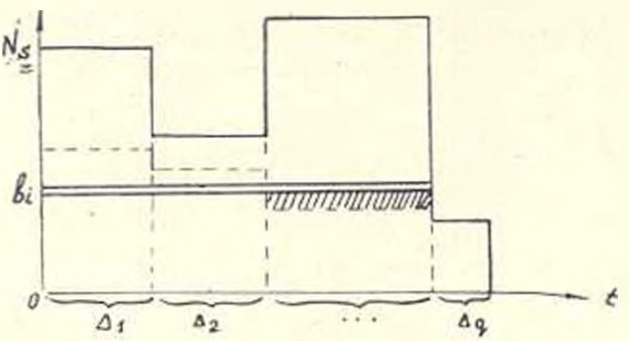

Рис. 2.

5. *Сопряженная задача.* Вернемся к потоковой интерпретации (1.1)—(1.4). Если заменить $N_i = \tau_i b_i$ в правой части неравенств (1.2), то можно заметить определенную симметрию постановки задачи. Действительно, рассмотрим комплекс из q операций, объемы которых $w'_S = N_S \cdot \Delta_S$, а максимально допустимые уровни ресурсов $b'_S = \Delta_S$, $S = 1, 2, \dots, q$. Количество ресурсов $N'(t)$ также является кусочно-постоянной функцией времени с интервалами постоянства $\Delta'_i = b_i$ и соответствующими уровнями $N'_i = \tau_i$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Обозначим x'_{si} объем S-ой операции, который выполняется в i-ом интервале. Тогда задача максимизации объема выполняемых работ сводится к задаче о максимальном потоке вида (1.1)—(1.4), если обозначить переменные x'_{si} как x_{is}. Поэтому оптимальное решение $\{x^{0}_{is}\}$ одной задачи будет определять и оптимальное решение $\{x'_{is} = x^{0}_{is}\}$ другой задачи. В новой задаче ресурсы N_S играют роль минимальных продолжительностей соответствующих операций $\tau'_S = \frac{w'_S}{b'_S} = N_S$, длительности интервалов Δ_S — максимально допустимых уровней ресурсов b_N, максимально допустимые уровни ресурсов δ_i — длительностей интервалов Δ_i, а минимальные длительности операций τ_i — уровней ресурсов в соответствующих интервалах. Применим теперь правило МВ для решения новой задачи и мы получим новый алгоритм для решения исходной задачи.

Пример. Построим график $N'(t)$. Поскольку $N'_i = \tau_i$, а $\Delta'_i = b_i$, то это график кусочно-постоянной функции, интервалы постоянства которой равны b_i, а значения функции в них равны τ_i (очередность интервалов можно брать любую, поэтому мы возьмем естественную очередность в порядке номеров операций i). Этот график показан на рис. 3.

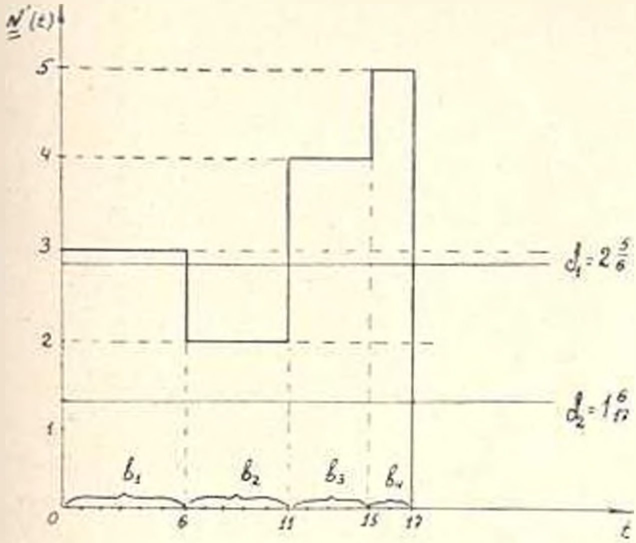

Рис. 3.

I шаг. Берем операцию (сопряженной задачи) $S = 1$ объема $w'_1 = c_1 = N_1 \cdot \Delta_1 = 10$. Пусть $\delta_1 = 4$, тогда только $x'_{41} = (\tau_4 - \delta_1) \cdot b_4 = 2 > 0$, остальные $x'_{Si} = 0$. Пусть $\delta_1 = 3$. Имеем $x'_{11} = x'_{12} = 0$, $x'_{13} = (\tau_3 - \delta_1) \cdot b_3 = 4$, $x'_{14} = (\tau_4 - \delta_1) \cdot b_4 = 4$. Так как $4 + 4 = 8 < 10$, то $\delta_1 < 3$. Пусть $2 \leqslant \delta_1 < 3$, тогда $x'_{11} = (3 - \delta_1) \cdot 6$, $x'_{12} = 0$, $x'_{13} = (4 - \delta_1) \cdot 4$, $x'_{14} = (5 - \delta_1) \cdot 2$.

Определяем δ_1 из уравнения

$$6(3 - \delta_1) + 4(4 - \delta_1) + 2(5 - \delta_1) = 10, \qquad \delta_1 = 2\frac{5}{6},$$

следовательно:

$$x'_{11} = 1; \quad x'_{12} = 0; \quad x'_{13} = 4\frac{2}{3}; \quad x'_{14} = 4\frac{1}{3}.$$

II шаг. $S = 2$, $w'_2 = c_2 = 21$. Очевидно, что $\delta_2 < 2$, т. к. при $\delta_2 = 2$ имеем:

$$x'_{21} = 5; \quad x'_{22} = 0; \quad x'_{23} = 3\frac{1}{3}; \quad x'_{24} = 1\frac{2}{3}; \quad \sum_{i=1}^{4} x_{2i} = 10 < 21.$$

Пусть $\hat{b}_2 = 2$, тогда

$$x'_{21} = (\hat{b}_1 - \hat{b}_2)\cdot 6; \qquad x'_{22} = (2 - \hat{b}_2)\cdot 5;$$

$$x'_{23} = \left(2\frac{5}{6} - \hat{b}_2\right)\cdot 4; \qquad x'_{24} = \left(2\frac{5}{6} - \hat{b}_2\right)\cdot 2.$$

Определяем $\hat{b}_2$ из уравнения

$$\left(2\frac{5}{6} - \hat{b}_2\right)\cdot 6 + (2 - \hat{b}_2)\cdot 5 + \left(2\frac{5}{6} - \hat{b}_2\right)\cdot 4 + \left(2\frac{5}{6} - \hat{b}_2\right)\cdot 2 = 21,$$

$\hat{b}_2 = 1\frac{6}{17}$, следовательно:

$$x'_{21} = 8\frac{15}{17}; \quad x'_{22} = 3\frac{4}{17}; \quad x'_{23} = 5\frac{47}{51}; \quad x'_{24} = 2\frac{49}{51}.$$

III шаг. Поскольку уровни ресурсов $\hat{b}_2$ одинаковы для всех i, то для остальных s решение находим сразу. Во-первых, общий объем работ сопряженной сети, который можно выполнить оставшимися ресурсами, равен $\hat{b}_2\cdot 17 = 23$. Следовательно, можно выполнить всю третью операцию ($w_3 = c_3 = 20$) и четвертую операцию в объеме 3 единиц. С учетом этого имеем:

$$x'_{31} = 20\frac{6}{17}; \quad x'_{32} = 20\frac{5}{17}; \quad x'_{33} = 20\frac{4}{17}; \quad x'_{34} = 20\frac{2}{17};$$

$$x'_{41} = 3\frac{6}{17}; \quad x'_{42} = 3\frac{5}{17}; \quad x'_{43} = 3\frac{4}{17}; \quad x'_{44} = 3\frac{2}{17}.$$

Окончательно получаем для исходной задачи минимальную продолжительность комплекса

$$T_{min} = \sum_{S=1}^{3} \hat{b}_S + \frac{y'_4}{N_4} = \sum_{S=1}^{3} \Delta_S + \frac{y'_4}{N_4} = 7\frac{1}{2},$$

где $y'_s = \sum_{i=1}^{4} x'_{si}$ — объем выполненной части операции S в сопряженной сети.

Значения $x^0_{iS} = x'_{Si}$ приведены в таблице.

Решение отличается от полученного прямым правилом МВ, но также является оптимальным. Существует тесная связь между сопряженным правилом МВ и известным эвристическим правилом распределения ресурсов по степени критичности операции (правило СК) [3], которая в момент t записывается в виде:

$$\Delta_i(t) = \frac{w_i - x_i(t)}{b_i}. \tag{5.1}$$

$i \backslash S$	1	2	3	4
1	1	$8\frac{15}{17}$	$7\frac{1}{17}$	$1\frac{1}{17}$
2	0	$3\frac{4}{17}$	$5\frac{15}{17}$	$\frac{15}{17}$
3	$4\frac{2}{3}$	$5\frac{47}{51}$	$1\frac{12}{17}$	$\frac{12}{17}$
4	$4\frac{1}{3}$	$2\frac{49}{51}$	$2\frac{6}{17}$	$\frac{6}{17}$

Теорема. Распределение ресурсов, полученное на основе правила СК, является оптимальным.

Доказательство. Достаточно показать, что правило СК эквивалентно сопряженному правилу МВ. Для этого рассмотрим s-ый шаг алгоритма, основанного на сопряженном правиле МВ. На каждом таком шаге ресурсы $N_s \cdot \Delta_s$ в первую очередь направляются на операции i с максимальной величиной

$$M'_{S-1, i} = \frac{w_i - \sum_{t=1}^{S-1} x_{it}}{b_i}. \tag{5.2}$$

Сравнивая (5.2) с (5.1) легко видеть, что $M'_{S-1, i}$ есть не что иное, как степень критичности операции i в данный момент (в начале S-го интервала).

6. *Заключение.* Описанные алгоритмы позволяют решить задачу минимизации времени выполнения комплекса операций. Для этого достаточно определить ближайший момент времени, для которого в оптимальном решении рассмотренной задачи все операции выполнены. Для этого удобно применять сопряженное правило МВ, т. е. правило СК.

ГСКБ ПЭА Поступило 7 III. 1980

Ս. Ռ. ՀՈՎԱԿԻՄՅԱՆ

ԱՌԱՎԵԼԱԳՈՒՅՆ ՀԱՎԱՍԱՐԵՑՄԱՆ ԿԱՆՈՆԸ ՌԵՍՈՒՐՍՆԵՐԻ ԲԱՇԽՄԱՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐՈՒՄ

Ա մ փ ո փ ու մ

Դիտարկվում է անկախ գործողությունների (աշխատանքների) բազմության վրա ռեսուրսների բաշխման խնդիրներ, գործողությունների համակարգի ավարտման նվազագույն ժամանակահատվածի տեսակետից։ Գործողություն-

ների կատարման արդյունքները գծային ֆունկցիա են ռեսուրսների քանակից, որը իր հերթին ընդհատվող հաստատուն ֆունկցիա է ժամանակից։

Առաջարկվում է ռեսուրսների առավելագույն համահավասարաչափ բաշխման կանոն և տրվում է նրա օպտիմալության ապացույցը։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Форд-Фалкерсон.* Потоки в сетях. М., «Наука», 1954.
2. *Бурков В. Н., Горгидзе И. А., Ловецкий С. Е.* Прикладные задачи теории графов. Тбилиси. «Мецниереба», 1974.
3. *Бурков В. Н., Ловецкий С. Е.* Максимальный поток через обобщенную транспортную сеть «Автоматика и телемеханика», т. XXVI. № 12, 1964.