ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Տեխնիկական գիտութ. սերիա XXIV, № 1, 1981 Серия технических наук

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

Л. М. ГАЙТОВА, Е. Н. ПЕРЕСЫПКИН

ОБ ОДНОЙ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧЕ В ТЕОРИИ ПОЛЗУЧЕСТИ ПРИ РАСЧЕТЕ НА ИЗГИБ ЖЕЛЕЗОБЕТОННОЙ БАЛОЧНОЙ ПЛИТЫ С УЧЕТОМ УСАДКИ БЕТОНА

Многие задачи строительной механики в настоящее время решаются с учетом упруго-вязких свойств конструкционных материалов. Различным вопросам этого важного направления посвящены работы Н. Х. Арутюняна, Г. Н. Маслова, А. Р. Ржаницына, М. А. Колтунова и др.

Вариационные методы теории ползучести, относящиеся главным образом к металлическим материалам, развиты в трудах Л. М. Качанова и Ю. Н. Работнова. В приложении к упруго-ползучим телам: бетон, дерево, пластмассы и др., эти методы рассмотрены М. А. Задояном.

В настоящей работе, исходя из наследственной теории старения [1, 2] и вариационных уравнений [3—5], получено вариационное уравнение для изгиба железобетонной упруго-ползучей балочной плиты при учете усадки бетона и приведены некоторые его приложения к расчету железобетонных симметрично армированных балочных плит.

В основу работы положены гипотезы и предпосылки, принятые в теории железобетонных конструкций. Модуль мгновенной деформации бетона E принимается постоянным осредненным, ползучесть арматуры не учитывается вследствие ее пренебрежимо малого значения в сравнение с ползучестью бетона, а коэффициент поперечного деформирования μ для бетона принят постоянным

1. Рассмотрим изгиб длинного симметрично армированного железобетонного слоя. При соотношении сторон такого слоя $b/l < 3$ его расчет сводится к расчету балки-полосы, вырезанной из слоя двумя плоскостями, перпендикулярными к длинной стороне и отстоящими друг от друга на единицу длины. Поперечное сечение такой балки единичной ширины примем прямоугольным с двойным симметричным армированием. Координатную плоскость совместим со срединной поверхностью слоя. Ось oy направим параллельно продольной стороне слоя, oz — вниз, высоту сечения обозначим $2h$, а пролет — l.

Рассмотрим первую стадию напряженно-деформированного состояния конструкции, когда в растянутой зоне еще не появились трещины.

Сечение балки-полосы испытывает действие изгибающих моментов $M(x, t)$ и продольных усилий $N(x, t)$, меняющихся по длине и во времени при учете усадки бетона $S(t)$, которая также равномерна по длине и переменна во времени.

Зависимость между напряжением и полной относительной деформацией в бетоне согласно [1, 2] имеет вид:

$$\frac{E}{1-\mu^2}\left[\varepsilon(t) + S(t)\right] = \sigma(t) + \int_{\tau_1}^{t} \sigma(\tau) K(t, \tau)\, d\tau, \tag{1}$$

где $S(t) = S_0^*\{1 - \exp[-\alpha(t - \tau_1)]\}^{-1}$; $S_0^* = S_0 \exp(-\alpha\tau_1)$; S_0 — наибольшее значение усадки бетона, величина которой устанавливается опытным путем; α — константа, зависящая от состава и условий твердения бетона; $K(t, \tau) = -E\dfrac{\partial}{\partial\tau}\left[\dfrac{1}{E} + C(t, \tau)\right]$ — ядро последействия по Н. Х. Арутюняну: $C(t, \tau) = \varphi(\tau)[1 - \exp[-\gamma(t - \tau)]]$; $\varphi(\tau) = \dfrac{A_1}{\tau} + C_0$; γ, A_1 и C_0 — характеристики старения бетона.

Используя гипотезу плоских сечений, условия статического равновесия и совместности деформаций, получим связь между компонентами деформаций и внутренних усилий

$$\varepsilon_0(t) = \beta\left[\frac{(1-\mu^2)N(t)}{EF} - S(t)\right] +$$

$$+ \int_{\tau_1}^{t}\left[\frac{(1-\mu^2)N(\tau)}{\nu EF} + S(\tau)\right] R_1(t, \tau)\, d\tau, \tag{2}$$

$$\varkappa(t) = \mu_0\left[\frac{M(t)}{D} + \int_{\tau_1}^{t}\frac{M(\tau)}{3\nu D} R(t, \tau)\, d\tau, \right. \tag{3}$$

где $\varepsilon_0(t)$ — относительное удлинение нейтрального слоя рассматриваемой плиты; $\varkappa(t)$ — кривизна плиты в деформированном состоянии; $\beta = \dfrac{1}{1+\nu}$; $\nu = \dfrac{2(1-\mu^2)E_1F_1}{EF}$; E_1 и F_1 — модуль упругости и площадь поперечного сечения слоев арматуры; F — площадь поперечного сечения бетона; $D = \dfrac{2Eh^2}{3(1-\mu^2)}$ — цилиндрическая жесткость; $\mu = \dfrac{1}{1+3\nu}$; $R_1(t, \tau)$ — резольвента ядра $\beta K(t, \tau)$, имеющая вид [6]:

$$R_1(t, \tau) = \eta_1(\tau) - \gamma\,\Theta(\tau)\int_{\tau}^{t}\left\{\exp\left[-\int_{\tau}^{\xi}\eta_1(z)\, dz\right]\right\} d\xi, \tag{4}$$

где

$$\eta_1(\tau) = \gamma\,[1 + \lambda_1 E \varphi(\tau)]; \qquad \Theta(\tau) = \eta_1^2(\tau) - \gamma\eta_1(\tau); \qquad \lambda_1 = \frac{3\nu}{1+\nu}.$$

Резольвента $R(t, \tau)$ строится аналогично, заменой λ_1 на $\lambda_1 = \dfrac{3\nu}{1+3\nu}$.

2. Сумма работ вариации внешних и внутренних сил на действительных перемещениях равна нулю в момент времени t. Тогда

$$\int_0^l [\varkappa(t)\,\delta M(t) + \varepsilon_0(t)'\,N(t)]\,dx - \delta A(t) = 0, \tag{5}$$

где $\delta A(t)$ вариация работы внешних сил:

$$\delta A(t) = \sum_{i=1}^{n} w_i(t)\,\delta P(t), \tag{6}$$

а $w_i(t)$ и $P_i(t)$ — соответственно, обобщенные перемещение и сила.

Подставив (2) и (3) в (5), получим

$$\delta \int_0^l \Big\{ \beta \Big[\frac{(1-\mu^2)N^2(t)}{2\nu EF} - S(t)N(t) + \int_{\tau_1}^{t} \Big[\frac{(1-\mu^2)N(\tau)}{\nu EF} N(t) + S(\tau)N(t) \Big] R_1 d\tau \Big] + \beta_0 \Big[\frac{M^2(t)}{2D} + \int_{\tau_1}^{t} \frac{M(\tau)}{3\nu D} R(t,\tau)\,d\tau \Big] - A(t) \Big\}\,dx = 0. \tag{7}$$

Выражение, заключенное в фигурные скобки, есть дополнительная энергия для железобетонной симметрично армированной балочной плиты, испытывающей изгиб с осевым растяжением при учете свойств ползучести и усадки бетона. Ее первая вариация равна нулю, а вторая существенно положительна, т. е. дополнительная энергия рассматриваемой плиты имеет минимальное значение

$$Э(t) = \min. \tag{8}$$

Уравнение (8) выражает принцип Кастильяно в теории ползучести для исследуемого случая.

Пусть из множества $\{P(t)\}$ сосредоточенных сил одна $P_k(t)$ получает бесконечно малое приращение $\delta P_k(t)$ и балочная плита неподвижна относительно опор. Для определения обобщенного перемещения получим формулу

$$w(x, t) = \frac{\partial Э(t)}{\partial P_k(t)}. \tag{9}$$

выражающую теорему Кастильяно для железобетонной балочной плиты при учете усадки и ползучести бетона.

Для расчета n раз статически неопределимой системы можно составить n интегральных уравнений типа Вольтерра для определения реакций избыточных связей. Представив выражение дополнительной энергии n раз статически неопределимой системы в функции внешних сил, усадки бетона и реакций $X_1(t)$, $X_2(t)$, ..., $X_n(t)$ избыточных связей, на основании формулы (9) получим систему интегральных уравнений

$$\frac{\partial Э(t)}{\partial X_i(t)} = 0\,(-\beta_0 X_i(t)), \qquad i = 1,\ 2,\ \dots,\ n. \tag{10}$$

Нуль в правой части имеем, когда опоры системы неподатливы.

В случае шарнирно-неподвижного закрепления концов однопролетной конструкции от действия равномерно распределенной и переменной во времени нагрузки интенсивностью $q(t)\,Н/м$ в ее поперечных сечениях возникнут изгибающие моменты и нормальные силы

$$M(t) = \frac{q(t)\,l}{2}\,x - \frac{q(t)\,x^2}{2}, \qquad N(t) = -H(t).$$

Так как $\partial M(t)/\partial H(t) = 0$, для определения нормальной силы согласно (10) имеем

$$\int_0^l \left\{ \frac{(1-\mu^2)\,N(t)}{EF} + S(t) + \int_{\tau_1}^{t} \left[\frac{(1-\mu^2)\,N(\tau)}{\nu EF} + S(\tau) \right] R(t,\tau)\,d\tau \right\} \frac{\partial N(t)}{\partial H(t)}\,\partial x = 0. \tag{11}$$

Замечая, что $\partial N(t)/\partial H(t) = -1$, и решив (11) относительно неизвестной продольной силы $H(t)$, получим выражение:

$$H(t) = \frac{EF}{2(1-\mu^2)}\,S(t) \left[1 - \frac{1+\lambda}{\omega(\alpha,\ t)} \int_{\tau_1}^{t} \omega(\alpha,\ \tau)\,L(t,\ \tau)\,d\tau \right], \tag{12}$$

где $L(t,\ \tau)$ — резольвента ядра $-\lambda^* R(t,\ \tau)$ $(\lambda^* = 1/\nu)$:

$$L(t,\ \tau) = \gamma_1^*(\tau) = \gamma_1(\tau) - \theta^*(\tau) \int_{\tau}^{t} \exp\left[-\int_{\tau}^{\xi} \gamma_1^*(z)\,dz \right] d\xi$$

$$\gamma_1^*(\tau) = (\lambda^* + 1)\,\gamma_1(\tau) - \lambda^* \gamma_1^{\bullet}; \qquad \theta_1^*(\tau) = \lambda^* \gamma_1^*(\tau)\,\gamma_1(\tau) + \lambda^* \gamma_1^{\bullet} + \lambda^* \theta \gamma_1^*(\tau); \tag{13}$$

$$\omega(\alpha,\ z) = 1 - \exp[-\alpha(t-\tau)].$$

Анализ (12) позволяет сделать вывод, что при симметричном армировании бетона возникают растягивающие напряжения от усадки, которые затухают во времени вследствие ползучести бетона.

Вариационное уравнение (9) для определения перемещений $\delta P_k(t)$, если в сечении, где ищется это перемещение, нет сосредоточенной силы соответствующего направления, непосредственно применить нельзя. В этом случае удобно применить метод введения дополнительной силы. Прогиб под этой силой по ее направлению определится согласно (9) по формуле

$$w^*(t) = \beta \int_0^l \left\{ \frac{(1-\mu^2)N(t)}{EF} + S(t) + \right.$$

$$+ \int_{\tau_1}^{t} \left[\frac{(1-\mu^2)N(\tau)}{\nu EF} + S(\tau) \right] R_1(t,\tau)\,d\tau \Bigg\} \frac{\partial N(t)}{\partial P^*(t)}\,dx + \beta_0 \int_0^l \left[\frac{M(t)}{D} + \right.$$

$$\left. + \int_{\tau_1}^{t} \frac{M(\tau)}{3\nu D} R(t,\tau)\,d\tau \right] \frac{\partial M(t)}{\partial P^*(t)}\,dx. \tag{14}$$

При нахождении угла поворота сечения поступим аналогично, введя вместо сосредоточенной силы $P^*(t)$ момент $M^*(t)$.

Для рассматриваемой задачи при $q(t) = q$ значение угла поворота торцового сечения $x = 0$. Тогда получим:

$$\varphi_A^*(t) = \beta_0 \frac{ql^3}{24D} \left[1 - \frac{1}{3\nu} \int_{\tau_1}^{t} R(t,\tau)\,d\tau \right]. \tag{15}$$

Напряжения в верхней и нижней арматуре определятся по формулам:

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_1(t) \\ \sigma_2(t) \end{array} \right\} = E_1[\varepsilon_0(t) \pm \varkappa(t)h] = E_1 \left\{ \beta \left[\frac{(1-\mu^2)N(t)}{EF} - S(t) \right] + \right.$$

$$+ \int_{\tau_1}^{t} \left[\frac{(1-\mu^2)N(t)}{\nu EF} + S(\tau) \right] R(t,\tau)\,d\tau \pm \beta_0 \left[\frac{M(t)}{D} + \right.$$

$$\left. \left. + \int_{\tau_1}^{t} \frac{M(\tau)}{3\nu D} R(t,\tau)\,d\tau \right] h \right\}, \tag{16}$$

а напряжения в верхних и нижних волокнах бетона —

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_в(t) \\ \sigma_н(t) \end{array} \right\} = \sigma_0(t) \pm \sigma_и(t) =$$

$$= \frac{N(t)}{F} - nE \cdot 2\varepsilon_0(t) \pm \left[-3\nu Eh\varkappa(x,t) + \frac{M(t)}{W} \right]. \tag{17}$$

Здесь $\varepsilon_0(t)$ и $\sigma_0(t)$ — соответственно, полная относительная деформация и напряжение в бетоне на уровне нейтрального слоя плиты.

Для иллюстрации приведем числовой пример: $q = 5000\ Н/м$; $l = 3\ м$; $E_1 = 2 \cdot 10^5\ МПа$; $E = 2 \cdot 10^4\ МПа$; $h = 0{,}2\ м$; $\gamma = 0{,}026$; $C_0 = 9 \cdot 10^{-5}\ МПа^{-1}$; $\alpha = 0{,}011$; $S_0 = 2 \cdot 10^{-4}$; два значения процента армирования: 1) $\mu_1 = 0{,}4\%$; 2) $\mu_2 = 0{,}8\%$.

Результаты расчета представлены в виде зависимостей рис. 1—4.

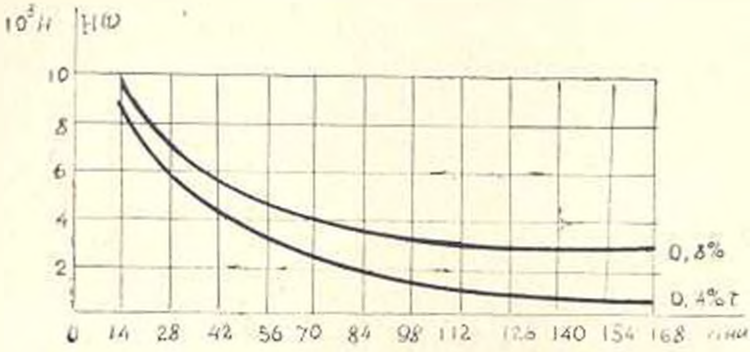

Рис. 1.

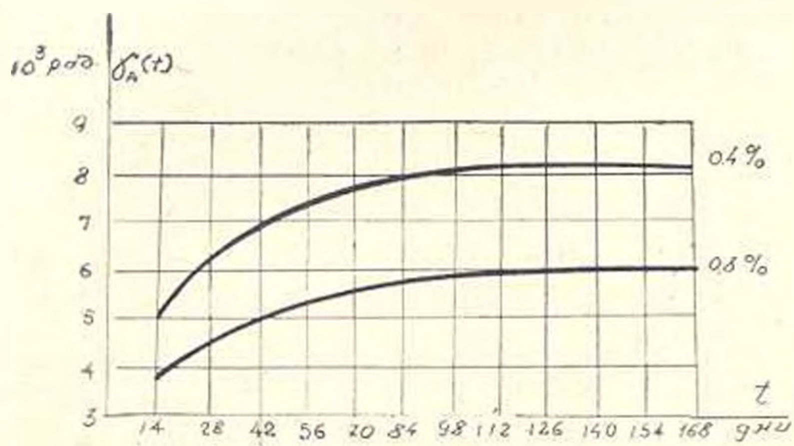

Рис. 2.

Нормальная сила (рис. 1) при проявлении усадки и ползучести бетона растет, стабилизируясь к 100—120 дням. Увеличение армирования увеличивает нормальную силу на 20%. Зависимость на рис. 2 показывает увеличение угла поворота торцового сечения, при этом конечное значение превышает начальное на 40%. Для большего процента армирования эффект изгиба меньше на 35—40%. Перераспределение напряжений между арматурой и бетоном в сечениях и их изменение во времени можно проследить по графикам на рис. 3—4.

Полученные зависимости позволяют дать анализ напряженно-деформированного состояния плиты, испытывающей вынужденные деформации в условиях ползучести материала. Они могут быть использованы при расчете стержневых железобетонных систем на ползучесть.

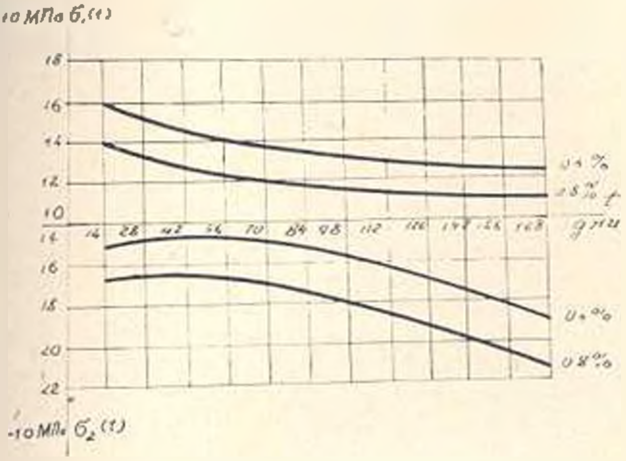

Рис. 3.

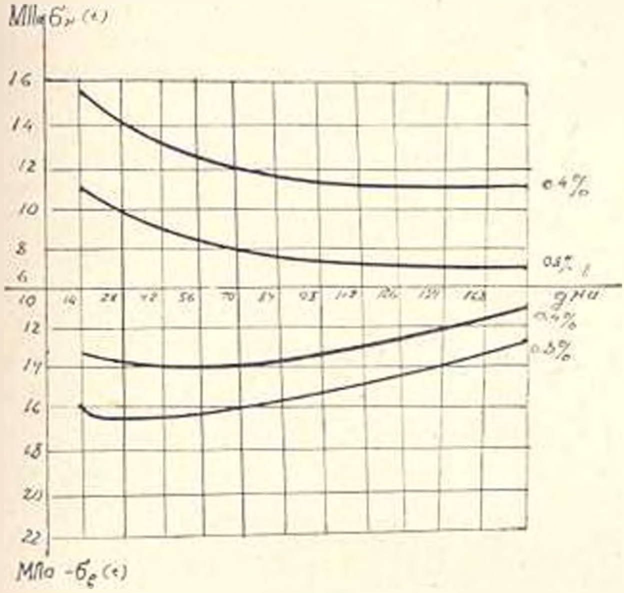

Рис. 4.

Краснодарский
политехн. институт

Поступило 30. VI. 1980

Լ. Մ. ԳԱՅՏՈՎԱ, Ի. Ն. ՊԻՐԵՍԻՊԿԻՆ

ՍՈՂՔԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՄԻ ՎԱՐԻԱՑԻՈՆ ԽՆԴՐԻ ՄԱՍԻՆ ԵՐԿԱԹԲԵՏՈՆԵ ՀԵԾԱՆԱՅԻՆ ՍԱԼԻ ԾՌՄԱՆ ՀԱՇՎԱՐԿԻ ԴԵՊՔՈՒՄ ԲԵՏՈՆԻ ՆԱՏՎԱԾՔԻ ՀԱՇՎԱՌՄԱՄԲ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Ելնելով ծերացման ժառանգականության տեսությունից, առաձգա-սող-ային հեծանային սալի ծռման համար ստացված է վարիացիոն հավասա-

րում՝ հաշվի առնելով բետոնի նստվածքը։ Տրված է նրա կիրառումը սիմետրիկ ամրանավորված սալերի հաշվարկի դեպքում։ Բերված է հաշվարկային օրինակ, որում ցույց է տրված բետոնի նստվածքի ու սողքի ազդեցությունը սալի ճիգերի և դեֆորմացիաների վրա։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнян Н. Х.* Некоторые вопросы теории ползучести. М.—Л., Гостехиздат, 1952.
2. *Маслов Г. Н.* Термическое напряженное состояние бетонных массивов при учете ползучести бетона. «Известия ВНИИГ», т. 28, 1940.
3. *Задоян М. А.* Об одном вариационном уравнении нелинейной теории ползучести. ДАН АрмССР, т. 25, № 5, 1958.
4. *Задоян М. А.* Применение вариационных методов теории ползучести при расчете железобетонных элементов. «Известия АН АрмССР (серия Т. Н.)», т. XXVIII, № 3, 1975.
5. *Задоян М. А.* Об одной вариационной задаче о прижатии слоя к основанию при учете реологических свойств материалов. «Известия АН АрмССР (серия Т. Н.)», т. XXX, № 5, 1977.
6. *Гайтова Л. М.* Обобщение и применение формулы Кастильяно к расчету на ползучесть по стадии I железобетонных балок. «Известия вузов. Строительство и архитектура», 1973, № 3.