

МАШИНОСТРОЕНИЕ

Г. Г. ПЕРСИЯН

ОБ ОДНОП КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ДВУХ ЦИЛИНДРОВ
С НЕИЗВЕСТНОЙ ЗОНОЙ КОНТАКТА

Контактные задачи для конечных тел с неизвестной зоной контакта помимо теоретического интереса представляют также значительный практический интерес и встречаются при расчете многих инженерных конструкций в современном машиностроении, автомобильном и железнодорожном транспорте, при проектировании различных деталей летательных аппаратов и в других областях прикладной механики.

Поэтому необходимо в точной математической постановке теории упругости в достаточно широком диапазоне изменения физических и геометрических параметров выяснить характерные закономерности взаимодействия конечных упругих тел между собой, получить расчетные формулы для определения размеров области контакта и вычисления контактных напряжений.

В настоящей работе рассматривается осесимметричная контактная задача теории упругости для двух цилиндров с различными упругими свойствами, имеющих конечные длины и одинаковые диаметры. Цилиндры контактируют между собой торцами, и один из них по нижней торцевой плоскости закреплен. Решение рассматриваемой задачи представляется в виде рядов Фурье—Дини с неизвестными коэффициентами, для определения которых получены парные ряды уравнения, содержащие функции Бесселя, решения которой сводятся к решению квази-вполне регулярных бесконечных систем линейных алгебраических уравнений. Окончательные выражения для контактных напряжений получены с выделенной особенностью. Получены также формулы для определения напряжений на поверхности контакта между цилиндром и основанием. Для частных значений внешней нагрузки, упругих постоянных и размеров цилиндров вычислены размеры области контакта и напряжения в контактных зонах.

Подробная библиография по этому вопросу приводится в [1].

1. Пусть два цилиндра конечной длины и одинакового диаметра, изготовленные из различных материалов, прижимаются по торцам друг к другу (рис. 1). На одном из торцов цилиндров нормальные и радиальные перемещения равны нулю, а на другом — приложена осе-

симметричная сжимающая нагрузка таким способом, что образуется кольцевая контактная область, наружный диаметр которой совпадает с диаметром цилиндров. Сцепление на поверхности контакта отсутствует. На боковых поверхностях цилиндров нормальные перемещения и касательные напряжения равны нулю.

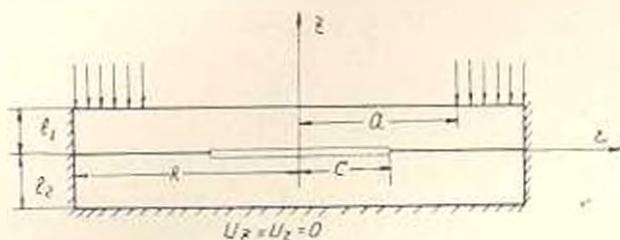


Рис. 1.

В дальнейшем все величины, относящиеся к верхнему цилиндру, будем отмечать индексом 1, а к нижнему — 2.

Граничные условия и условия контакта рассматриваемой задачи имеют вид:

$$\sigma_z^{(1)} = (r, l_1) = \begin{cases} 0, & 0 \leq r < d \\ -P, & d < r < R \end{cases} = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k J_0(\beta_k r), \quad \tau_{rz}^{(1)}(r, l_1) = 0; \quad (1.1)$$

$$u_r^{(i)} = (R, z) = \tau_{rz}^{(i)}(R, z) = 0 \quad (i = 1, 2); \quad (1.2)$$

$$u_r^{(2)} = (r, l_2) = u_z^{(2)}(r, l_2) = 0; \quad (1.3)$$

$$\tau_{rz}^{(i)}(r, 0) = 0, \quad \sigma_z^{(1)}(r, 0) = \sigma_z^{(2)}(r, 0); \quad (1.4)$$

$$\begin{cases} \sigma_z^{(1)}(r, 0) = 0, & 0 \leq r < c; \\ u_z^{(1)}(r, 0) = -u_z^{(2)}(r, 0), & c < r < R, \end{cases} \quad (1.5)$$

где l_i — длины; R — радиус цилиндров; $J_n(x)$ — функция Бесселя действительного аргумента первого рода, а β_k — положительные корни уравнения $J_1(\beta_k R) = 0$.

Функции напряжений Лява ищем в виде [2]:

$$\begin{aligned} \Phi^{(i)}(r, z) = & z(B_i z^2 + C_i z) + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k^{(i)} \operatorname{sh} \beta_k z + B_k^{(i)} \operatorname{ch} \beta_k z + \\ & + C_k^{(i)} \beta_k z \operatorname{sh} \beta_k z + D_k^{(i)} \beta_k z \operatorname{ch} \beta_k z) J_0(\beta_k r). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Пользуясь обычными формулами [3], вычисляя при помощи (1.6) напряжения и перемещения, удовлетворим далее условиям (1.1) — (1.5) и введя также следующие обозначения

$$(1 - \nu_1) C_k^{(1)} + G(1 - \nu_2) C_k^{(2)} = \frac{X_k}{\beta_k^2}, \quad (1.7)$$

получим следующую систему парных рядов уравнений, содержащих функции Бесселя

$$\begin{cases} a_0 + \gamma \sum_{k=1}^{\infty} (1 - M_k) \beta_k X_k J_0(\beta_k r) = \sum_{k=1}^{\infty} N_k J_0(\beta_k r), & 0 \leq r < c; \\ q_0 + \sum_{k=1}^{\infty} X_k J_0(\beta_k r) = 0, & c < r < R, \end{cases} \quad (1.8)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} \gamma &= -\frac{1}{1 - \nu_1 + G(1 - \nu_2)}; \quad G = \frac{G_1}{G_2}; \quad q_0 = (1 - 2\nu_1)C_1 + G(1 - 2\nu_2)C_2; \\ \Delta_k M_k &= (1 - \nu_1)(H_k^{(1)} - Q_k^{(1)})S_k^{(2)} + G(1 - \nu_2)(U_k^{(2)} - S_k^{(2)})Q_k^{(1)}; \\ \Delta_k N_k &= -(1 - \nu_1)a_k F_k^{(1)}S_k^{(2)}; \quad \Delta_k = (1 - \nu_1)H_k^{(1)}S_k^{(2)} + G(1 - \nu_2)Q_k^{(1)}U_k^{(2)}; \\ S_k^{(2)} &= (3 - 4\nu_2)\text{sh}^2 \mu_{k2} + \mu_{k2}^2 + 4(1 - \nu_2)^2; \quad U_k^{(2)} = (3 - 4\nu_2)\text{sh} \mu_{k2} \text{ch} \mu_{k2} - \mu_{k2}; \\ \mu_{k1} &= \beta_k l_1; \quad Q_k^{(1)} = \text{sh}^2 \mu_{k1} - \mu_{k1}^2; \\ F_k^{(1)} &= \text{sh} \mu_{k1} + \mu_{k1} \text{ch} \mu_{k1}; \quad H_k^{(1)} = \text{sh} \mu_{k1} \text{ch} \mu_{k1} - \mu_{k1}; \end{aligned} \quad (1.9)$$

C_i — модули сдвига, а ν_i — коэффициенты Пуассона.

Подставляя X_k в виде

$$X_k = \frac{1}{(\beta_k c)^{\nu_1} J_0^{\nu_1}(\beta_k R)} \sum_{n=0}^{\infty} b_n J_{2n+\nu_1}(\beta_k c) \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \quad \beta_0 = 0, \quad (1.10)$$

и применяя известные методы решения парных рядов-уравнений [4—6], решение уравнений (1.8) сводится к решению следующей бесконечной системы линейных алгебраических уравнений

$$b_s = \sum_{n=0}^{\infty} a_{sn} b_n + d_s, \quad (1.11)$$

где

$$\begin{aligned} a_{sn} &= \frac{2(4s+3)(-1)^{n+s}}{R^2} \int_0^c \frac{K_1(y) I_{2n+\nu_1}\left(\frac{cy}{R}\right) I_{2s+\nu_1}\left(\frac{cy}{R}\right)}{y I_1(y)} dy + \\ &+ \frac{2(4s+3)}{R^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M_k J_{2n+\nu_1}(\beta_k c) J_{2s+\nu_1}(\beta_k c)}{\beta_k^2 J_0^{\nu_1}(\beta_k R)}; \end{aligned} \quad (1.12)$$

$$d_s = -\frac{2(4s+3)}{R^2 \gamma} c^{\nu_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1 - \nu_1) F_k^{(1)} S_k^{(2)} a_k}{\beta_k^{\nu_1} \Delta_k} J_{2s+\nu_1}(\beta_k c) - \frac{2\sqrt{2}c^{\nu_1} a_n}{R^2 \sqrt{\pi} \gamma} \delta_{s0};$$

δ_{s0} — символ Кронекера; $I_n(x)$, $K_n(x)$ — функция Бесселя от мнимого аргумента, соответственно, первого и второго рода.

Квази-вполне регулярность бесконечной системы линейных уравнений (1.11) доказывается аналогично, как это сделано в [5, 6].

Подставив значение X_k по формуле (1.10) в первое уравнение (1.8), для контактного нормального напряжения получим следующее выражение [6]

$$\begin{aligned} \sigma_z(r, 0) = & a_0 - \gamma \sum_{k=1}^{\infty} M_k \beta_k X_k J_0(\beta_k r) - \sum_{k=1}^{\infty} N_k J_0(\beta_k r) + \frac{\gamma \sqrt{R}}{2c^{3/2}} \times \\ & \times \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n \left[\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{K_1(y) I_{2n+3/2} \left(\frac{cy}{R} \right) I_0 \left(\frac{ry}{R} \right) \sqrt{y}}{I_1(y)} dy + \right. \\ & \left. + \frac{\sqrt{2} \left(\frac{c}{R} \right)^{2n+3/2} \Gamma^2(n+3/2)}{\pi \left(\frac{r}{R} \right)^{2n+3} \Gamma(2n+5/2)} F(n+1, n+1, 2n+5/2, c^2/r^2) \left(1 - \frac{c^2}{r^2} \right)^{-1/2} \right], \\ & c < r < R \quad (1.13) \end{aligned}$$

где $\Gamma(x)$ — гамма функция; $F(x, \beta, \gamma, x)$ — гипергеометрический ряд. Для нормального $\sigma_z^{(2)}(r, l_2)$ и касательного $\tau_{rz}^{(2)}(r, l_2)$ напряжений получим следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \sigma_z^{(2)}(r, l_2) = & a_0 + 2(1 - \nu_1) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_{k2} \operatorname{sh} \mu_{k2} + 2(1 - \nu_2) \operatorname{ch} \mu_{k2}}{\Delta_k} \times \\ & \times [(1 - \nu_1) F_k^{(1)} a_k - Q_k^{(1)} \beta_k X_k] J_0(\beta_k r); \quad (1.14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{rz}^{(2)}(r, l_2) = & 2(1 - \nu_2) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_{k2} \operatorname{ch} \mu_{k2} - (1 - 2\nu_2) \operatorname{sh} \mu_{k2}}{\Delta_k} \times \\ & \times [(1 - \nu_1) F_k^{(1)} a_k - Q_k^{(1)} \beta_k X_k] J_1(\beta_k r). \quad (1.15) \end{aligned}$$

Неизвестную величину c можно определить из условия равенства нулю контактного напряжения на границе области контакта, что равносильно условию [6]:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n = 0. \quad (1.16)$$

При полном контакте ($c = 0$) и отсутствии особенности напряжений на краю контакта зависимость между длиной цилиндров от свойств материалов и размеров приложения внешней нагрузки выражается следующей формулой [6]:

$$a_0 - \sum_{k=1}^{\infty} N_k = 0. \quad (1.17)$$

В этом случае для контактного нормального напряжения получаем [6]:

$$\sigma_r(r, 0) = \sigma_0 - \sum_{k=1}^{\infty} N_k J_0(\beta_k r). \quad (1.18)$$

Численные примеры

Рассмотрим два цилиндра одинаковой длины и диаметра, изготовленные из различных материалов. На верхнем торце верхнего цилиндра приложена осесимметричная сжимающая нагрузка (рис. 1):

$$\sigma_z^{(1)}(r, l_1) = \begin{cases} 0, & 0 < r < a \\ -P, & a < r < R \end{cases} = -\frac{R^2 - a^2}{R^2} P + \frac{2aP}{R^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_1(\beta_k a) J_0(\beta_k r)}{\beta_k J_0'(\beta_k R)}. \quad (2.1)$$

Целью вычислений является определение размеров области контакта и величины контактного нормального напряжения. Для этого предварительно необходимо найти зависимость радиуса контактной области c от l , что связано с большим объемом вычислений. Во избежание отмеченных трудностей в работе задаются значения c и a и при заданных значениях упругих характеристик материалов определяется l ($l_1 = l_2 = l$).

После определения таким образом радиуса c области контакта, по формулам (1.13)–(1.15) вычислены контактные напряжения для каждого c , соответствующего заданному радиусу a распределенных внешних нагрузок.

Вычисления проведены для значений: $\frac{c}{R} = 0, 0,2, 0,4, 0,6, 0,8$; $\nu_1 = 0,1, 0,3, 0,4$; $\nu_2 = 0,1, 0,3, 0,4$; $G = 0,05, 0,5, 1, 2, 20$; $a = 0,9R, 0,99R$.

Значения длины цилиндра ($l = l_1 = l_2$) при различных значениях размеров области контакта, коэффициентов Пуассона и модулей упругости материалов цилиндров для $a = 0,99R$ приведены в табл. 1.

При контакте по всему торцу ($c = 0$) предельное значение длины цилиндров для различных значений размеров приложения нагрузки ($R - a$), модулей упругости материалов цилиндров при $\nu_1 = \nu_2 = 0,1$ приведены в табл. 2.

Значения напряжений $\sigma_z^{(2)}(r, l_2)$ на поверхности контакта между нижним цилиндром и основанием при: $a = 0,9R$; $\nu_1 = \nu_2 = 0,1$; $\nu_1 = 0,1$; $\nu_2 = 0,3$; $\nu_1 = 0,3$; $\nu_2 = 0,1$; $\frac{c}{R} = 0,6$; $G = 0,05, 0,5, 1, 2$ и 20 приведены в табл. 3.

c/R	G	l/R						
		$\nu_1=0,1,$ $\nu_2=0,1$	$\nu_1=0,1,$ $\nu_2=0,3$	$\nu_1=0,3,$ $\nu_2=0,1$	$\nu_1=0,3,$ $\nu_2=0,3$	$\nu_1=0,1,$ $\nu_2=0,4$	$\nu_1=0,4,$ $\nu_2=0,1$	$\nu_1=0,3,$ $\nu_2=0,4$
0	0,05	0,6499	0,6549	0,6448	0,6509	0,6577	0,6441	0,654
	0,5	0,5347	0,5624	0,5122	0,5405	0,5788	0,4979	0,5614
	1	0,471	0,5046	0,4477	0,4821	0,5268	0,4373	0,5057
	2	0,4075	0,4426	0,3854	0,42	0,4677	0,3722	0,446
	20	0,2352	0,2609	0,221	0,2452	0,2845	0,2126	0,2682
0,2	0,05	0,6204	0,6249	0,6155	0,6214	0,6274	0,6118	0,6245
	0,5	0,5116	0,538	0,4905	0,5194	0,554	0,4770	0,5376
	1	0,4516	0,4837	0,4294	0,4624	0,505	0,4157	0,4852
	2	0,3909	0,4215	0,3696	0,403	0,448	0,3571	0,4282
	20	0,2257	0,2503	0,212	0,2352	0,2733	0,204	0,2575
0,4	0,05	0,5315	0,5354	0,5276	0,5325	0,5376	0,5245	0,5352
	0,5	0,4425	0,4647	0,4249	0,4493	0,4784	0,4136	0,4649
	1	0,3919	0,4191	0,3729	0,4013	0,4378	0,3612	0,421
	2	0,3395	0,3684	0,3212	0,3497	0,3899	0,31	0,3718
	20	0,1948	0,2157	0,1829	0,2026	0,2356	0,1759	0,2218
0,6	0,05	0,3913	0,391	0,3886	0,3921	0,3956	0,3866	0,394
	0,5	0,3294	0,345	0,3169	0,3341	0,3548	0,3087	0,3452
	1	0,2927	0,3122	0,2786	0,2989	0,3257	0,2689	0,3132
	2	0,2536	0,2745	0,2395	0,2624	0,2901	0,2313	0,2765
	20	0,1444	0,1597	0,1354	0,1497	0,1732	0,1302	0,1636
0,8	0,05	0,21	0,2114	0,2089	0,2104	0,2122	0,2083	0,2114
	0,5	0,1778	0,1856	0,1724	0,1802	0,1909	0,1694	0,1858
	1	0,1581	0,1684	0,1518	0,1612	0,1763	0,1495	0,1686
	2	0,1366	0,1477	0,1306	0,1401	0,1561	0,1274	0,1487
	20	0,078	0,0862	0,0741	0,0809	0,0938	0,0722	0,0884

Таблица 2

a/R	l/R при $\varepsilon=0, \nu_1=\nu_2=0,1$				
	$G=0,05$	$G=0,5$	$G=1$	$G=2$	$G=20$
0,99	0,6499	0,5347	0,471	0,4075	0,2352
0,95	0,6429	0,5292	0,4665	0,4036	0,5331
0,9	0,6484	0,5334	0,4702	0,4067	0,2348
0,8	0,6205	0,5117	0,4516	0,3909	0,2265
0,7	0,5817	0,4812	0,4256	0,3687	0,2137
0,6	0,525	0,4364	0,3864	0,335	0,1945
0,5	0,45	0,3753	0,3325	0,2888	0,1669
0,4	0,3622	0,302	0,2672	0,2309	0,1333
0,3	0,2714	0,2262	0,2	0,1728	0,0997
0,2	0,1808	0,1506	0,1331	0,1152	0,0654
0,1	0,0903	0,0755	0,0667	0,0578	0,0333
0,05	0,0478	0,0408	0,0362	0,0312	0,0173

R/r	$\sigma_2^{(2)}(r, t_2)$				
	G=0,05	G=0,5	G=1	G=2	G=20
$r_1 = r_2 = 0,1$					
0,1	0,009763	0,009596	0,007826	0,005434	0,00072
0,2	0,00565	0,008364	0,007835	0,006189	0,001085
0,3	-0,004142	0,003662	0,005746	0,006154	0,001953
0,4	-0,024444	-0,009798	-0,003452	0,001155	0,003337
0,5	0,061676	-0,040985	-0,029866	-0,019594	-0,000681
0,6	-0,120403	-0,099419	-0,085618	-0,073366	-0,042458
0,7	-0,197028	-0,185345	-0,176844	-0,167471	-0,148541
0,8	-0,276413	-0,281956	-0,283646	-0,284182	-0,283682
0,9	-0,336444	-0,359313	-0,372436	-0,385155	-0,408961
1	-0,358495	-0,388636	-0,406852	-0,425344	-0,462516
$r_1 = 0,1, r_2 = 0,3$					
0,1	-0,005503	-0,005378	-0,005648	-0,005656	-0,00183
0,2	-0,008413	-0,006432	-0,005893	-0,005501	-0,002259
0,3	-0,016121	-0,010694	-0,008303	-0,006465	-0,00285
0,4	-0,033466	-0,023215	-0,017651	-0,012575	-0,003813
0,5	-0,067072	-0,052433	-0,043313	-0,033841	-0,011255
0,6	-0,121924	-0,106989	-0,096727	-0,08527	-0,054061
0,7	-0,194936	-0,186609	-0,180123	-0,172382	-0,154092
0,8	-0,271422	-0,275361	-0,277129	-0,278363	-0,281009
0,9	-0,329604	-0,345922	-0,356555	-0,36829	-0,396821
1	-0,351031	-0,372395	-0,387041	-0,403603	-0,445677
$r_1 = 0,3, r_2 = 0,1$					
0,1	0,009861	0,009078	0,006978	0,004588	0,000552
0,2	0,005887	0,008328	0,007332	0,005459	0,000849
0,3	-0,003678	0,004588	0,006093	0,005932	0,001578
0,4	-0,023703	-0,007383	-0,001508	0,002268	0,002976
0,5	-0,060732	-0,036993	-0,025902	-0,016364	0,000189
0,6	-0,119521	-0,094933	-0,081591	-0,068936	-0,039972
0,7	-0,196598	-0,182489	-0,173389	-0,164262	-0,147567
0,8	-0,276732	-0,282683	-0,283978	-0,284135	-0,283814
0,9	-0,337555	-0,363945	-0,377296	-0,389491	-0,414612
1	-0,359792	-0,394978	-0,413796	-0,431491	-0,461612

ЕрПН № К. Маркса

Поступило 28. III. 1980

Վ. Գ. ՆԵՐՍԻՍՅԱՆ

ԱՆՆԱՅՏ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ՏԻՐՈՒՅԹՈՎ ԵՐԿՈՒ ԳՍԱՆՆԵՐԻ
ԿՈՆՏԱԿՏԻ ՄԻ ԽՆԳՐԻ ՄՍԱՈՒՆ

Ա մ փ ո փ ո լ մ

Դիտարկվում է ճակատներով հզված, տարբեր առաձգական հատկու-
թյուններ, միևնույն արամագծիք և վերջավոր նրկարուժյուններ ունեցող եր-
կու շրջանային զլանների առաձգականության տեսության ստանցքասիմետրիկ
խնդիր, երբ զլաններից մեկը ներքևի ճակատով ամրացված է կոշտ հիմքին:
Նորմալ տեղափոխումները և շոշափող լարումները զլանային մակերևութների
վրա հավասար են զրոյի: Գրանների կոնտակտի տիրույթը բնորոշվում է ան-

հայտ: Գիտարկվում է արտաքին այնպիսի բեռ, որի ղեկըրում առաջանում է օղակաձև կոնտակտի տիրույթ: Խնդրի լուծումը ներկայացվում է Ֆլուրե-Դինի շարքերի միջոցով: Այդ շարքերի գործակիցների որոշման համար ստացվում է Բեսսելի ֆունկցիաներ պարունակող դույզ- շարք հավասարումներ, որոնց լուծումները հանդեցված են րվագիլիովին կանոնավոր գծային հանրահաշվական հավասարումների անվերջ համակարգի լուծմանը: Բերված թվային օրինակներում որոշվում է կոնտակտի տիրույթի չափը և լարումները կոնտակտների մակերևույթների վրա:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Мартиросян З. А. О двух контактных задачах для круглых упругих цилиндров конечной длины. «Известия АН АрмССР. Механика», т. XXXI, № 5, 1978.
2. Абрамян Б. Л. К задаче осесимметричной деформации круглого цилиндра. «Доклады АН АрмССР», т. XIX, № 1, 1954.
3. Тимошенко С. П. Теория упругости. М., ОНТИ, 1937.
4. Cooke I. C., Tranter C. J., Dual Fourier—Bessel Series. The Quart. Journ. of Mech. and Appl. Mathem. August, v. XII, p. 2, 1959, Oxford.
5. Баблюян А. А., Мелконян А. П. О двух смешанных осесимметричных задачах теории упругости. «Известия АН АрмССР. Механика», т. XXII, № 5, 1969.
6. Мартиросян З. А., Нерсисян Г. Г. Некоторые контактные задачи для двух конечных цилиндров из различных материалов. «Известия АН АрмССР (серия Т. II.)», т. XXXIII, № 5, 1980.