ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Տեխնիկական գիտություններ, հատոր XXXIII, № 4, 1980 Серия технических наук

Э. Н. МАНУКЯН

ОСНОВЫ МЕТОДА МАКСИМАЛЬНО-ФИЗИЧЕСКОГО ПРАВДОПОДОБИЯ

Техническое состояние сложного оборудования определяется состоянием его отдельных блоков, узлов и элементов, параметры которых не всегда возможно непосредственно контролировать из-за их недоступности, сложности необходимого контрольно-измерительного оборудования. Оценку этих параметров можно производить, обработав специальными методами результаты контроля входных и выходных переменных состояния объекта, несущих в себе информацию о текущем состоянии внутренних узлов и элементов. Рассмотрим одну из задач такого косвенного контроля со следующей постановкой.

Пусть исследуемый объект представлен векторами: $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^T$ контролируемых выходных переменных; $X = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$, контролируемых входных переменных; $B = (b_1, b_2, \ldots, b_k)^T$ неконтролируемых параметров внутренних элементов, характеризующих техническое состояние объекта. Заданы результаты измерения входных $X_э$ и выходных $Y_э$ переменных, а также априори известны функции распределений случайных ошибок измерения. Известна структура, природа и характер физических процессов, протекающих в объекте. Требуется оценить значения параметров $b_1, b_2, \ldots, b_k$.

В теории идентификации статистических решений при аналогичных случаях эффективным методом решения задачи считается метод максимального правдоподобия (ММП), при котором наилучшими оценками считаются значения $\overline{b}_1, \overline{b}_2, \ldots, \overline{b}_k$, максимизирующие функцию правдоподобия $P_{Y/B}(Y_э/\overline{B})$.

Полученная таким образом математическая модель правдоподобна, адекватна с объектом лишь по внешним признакам: по входным и выходным сигналам. В теории идентификации, где после оценивания параметров мы оперируем только с входными и выходными переменными полученной модели, такого рода адекватность является вполне приемлемой и не противоречит требованиям постановки задачи. При косвенном же контроле, когда модель предназначена для анализа внутреннего состояния объекта, такого «внешнего» подобия модели с объ-

ектом недостаточна. Здесь необходимо потребовать, чтобы модель полнее отражала качественную и количественную картину реальных физических процессов, протекающих в объекте, его техническое состояние. Исходя из этих требований, в данной работе предлагается наиболее близкими к своим истинным значениям считать те значения внутренних параметров $b_1, b_2, \ldots, b_r$, при которых в вышеописанной стохастической модели с наибольшей вероятностью обеспечиваются фундаментальные законы физики, описывающие реальные процессы, протекающие в объекте. Полученные значения $\overline{B}$ будем называть оценками максимально-физического правдоподобия (МФП). Необходимым условием применения метода максимально-физического правдоподобия (ММФП) является составление детерминированной математической модели исследуемого объекта, отвечающей следующим требованиям.

1. Каждый элемент, оператор, строка-уравнение, модуль в выражениях математической модели должны иметь определенный физический смысл, являться прямой формой записи конкретного фундаментального закона физики, описывающего реальный процесс в соответствующем элементе, узле или блоке анализируемого объекта.

2. Не разрешается преобразование исходных форм записи математических выражений с целью их сокращения или удобства записи.

3. Форма записи математических моделей должна обеспечить вывод условий соблюдения законов физики, представляемых с помощью знаков отношений $=, >, \leqslant, \ldots$ и т. д.

Известная априорная информация о структуре и физической природе объекта создает реальные предпосылки для формирования моделей, отвечающих этим требованиям. Например, если объект можно представить электрической схемой замещения, модель, отвечающая вышеперечисленным требованиям, будет представлять собой систему уравнений, где каждая строка является записью только первого, второго законов Кирхгофа или закона Ома для соответствующего узла, контура, элемента схемы замещения.

На следующем этапе реализации ММФП необходимо составить функцию правдоподобия, представляющую взаимосвязи между вероятностями соблюдения физических законов в стохастической модели и значениями искомых параметров. Составим эту функцию для безынерционных объектов. Пусть модель представляет собой систему конечных уравнений

$$\Phi(X, Y, B, U) = 0, \tag{1}$$

где $\Phi(X; Y; B; U)$ — вектор нелинейных функций; $U = (u_1, u_2, \ldots, u_r)^1$ — вектор неконтролируемых переменных состояния.

Предположим, что обеспечение равенства в каждой из строк системы (1) соответствует соблюдению некоторого закона физики. Известны результаты измерений входных и выходных величин $X_э$ и $Y_э$

$$X_э = X + E'; \qquad Y_э = Y + E'', \tag{2}$$

где E' и E'' — векторы случайных ошибок измерений соответствующих величин с известными функциями распределений. Подставим из (2) значения X и Y в (1). Получим стохастическую модель объекта для текущего состояния:

$$\Phi(X_i - E';\ Y - E'';\ \overline{B};\ \overline{U}) = 0. \tag{3}$$

Отметим, что достижение абсолютного равенства в каждой строке (3) является уже случайным событием. Введя обозначение $Z = \Phi(X_i - E';\ Y_i - E',\ \overline{B};\ \overline{U})$ и рассматривая Z как функцию от случайных аргументов E' и E'' при фиксированных $\overline{B}$ и $\overline{U}$, определим плотность вероятности появления Z. Тогда вероятность соблюдения использованных в модели законов физики будет определяться как:

$$dP = P_{Z/B,\,U}(Z = 0/\overline{B};\ \overline{U}). \tag{4}$$

Рассмотрев в (4) $\overline{B}$ и $\overline{U}$ в качестве неизвестных, априорную плотность вероятностей в (4) при измеренных значениях X_i и Y_i, обозначим через некоторую функцию L:

$$L(X_i;\ Y_i;\ \overline{B};\ \overline{U}) = P_{Z/B\ \ U}(Z = 0/\overline{B};\ \overline{U}), \tag{5}$$

которую будем называть функцией физического правдоподобия (ФФП).

На следующем этапе реализации ММФП, согласно предложенному принципу максимально-физического правдоподобия, определяются значения $\overline{B}$ и $\overline{U}$, максимизирующие ФФП.

С целью определения точности оценок ММФП рассмотрим ковариации этих оценок. Предположим, что с помощью линейных преобразований (3) можно представить в виде:

$$E = \varphi(X_i;\ Y_i;\ \overline{B};\ \overline{U}), \tag{6}$$

где E — $n + m$-мерный вектор, состоящий из компонентов векторов E' и E''; $\varphi(X_i;\ Y_i;\ \overline{B};\ \overline{U})$ — $n + m$-мерный вектор нелинейных функций.

Для определения приближенного значения функций $\varphi(X_i;\ Y_i;\ \overline{B};\ \overline{U})$ можно воспользоваться уравнением (11). Тогда на основании (6) можно написать:

$$P_{Z/B,\,U}(Z = 0/\overline{B};\ \overline{U}) = P_{E/B,\,U}(\varphi(X_i;\ Y_i;\ \overline{B};\ \overline{U})/\overline{B};\ \overline{U}) =$$

$$= L(X_i;\ Y_i;\ \overline{B};\ \overline{U}). \tag{7}$$

Определим зависимость между (10) и функцией правдоподобия $L_{\text{мп}}$, используемой в классическом методе максимального правдоподобия [2]. Предположим, что в ММП используется модель (1). Если Y_i и (3) рассмотреть как функцию от E' и E, то выражение (6) можно представить как обратную функцию этой зависимости. В таком случае

по правилу преобразования плотности распределения системы случайных величин имеем:

$$P_{Y/B;\,U}(Y_э/\overline{B};\ \overline{U}) =$$

$$= P_{Y/B;\,U}(\varphi(X_э;\ Y_э;\ \overline{B};\ \overline{U})/\overline{B};\ \overline{U})\cdot|\det\left[\frac{\partial\varphi(X_э;\ Y_э;\ \overline{B};\ \overline{U})}{\partial Y_э}\right]. \qquad (8)$$

Из (7) и (8) получим:

$$L_{мп} = L\,(X_э;\ Y_э\ \overline{B};\ \overline{U})\cdot\det\left[\frac{\partial\varphi(X_э;\ Y_э;\ \overline{B};\ \overline{U})}{\partial Y_э}\right]. \qquad (9)$$

Последнее можно трактовать следующим образом: оценки ММФП эквивалентны оценкам ММП для тех моделей объекта, функция правдоподобия при которых представлена в виде (9). В то же время для ММП справедливо неравенство Крамера-Рао [1, 2], поэтому для оценок ММФП получим:

$$COV(\overline{B}) \geq J^{-1},$$

где

$$J = M\left[\left(\frac{\partial\ln L_{мп}}{\partial\overline{B}}\right)\cdot\left(\frac{\partial\ln L_{мп}}{\partial\overline{B}}\right)^{т}\right] =$$

$$= M\left[\frac{\partial^2\left[\ln L\,(X_э;\ Y_э;\ \overline{B};\ \overline{U})\cdot\left|\det\frac{\partial\varphi}{\partial Y_э}\right|\right]}{\partial\overline{B}\cdot\partial\overline{B}^{т}}\right].$$

Пример. Пусть имеется объект, схема замещения которого представлена на рис. Контролируемой входной переменной является *э.д.с.* источника напряжения U, выходной переменной — ток I. Заданы результаты измерений этих величин $U_э=1в$ и $I_э=1а$. Ошибка измерения тока Δ имеет нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $\sigma^2 = 0{,}01а^2$. Ошибкой измерения *э.д.с.* можно пренебречь. Требуется по результатам измерений оценить значение активного сопротивления R.

Определим оценку ММФП искомого параметра, используя вышеизложенную схему.

Этап 1. Составим знаковую модель объекта. В данном случае для описания процессов, протекающих в объекте, необходимо использовать закон Ома. Возможны следующие три формы записи математической модели:

$$\frac{U}{R} - I = 0; \qquad U - IR = 0; \qquad \frac{U}{I} - R = 0.$$

Этап 2. Составим ФФП для всех трех моделей. Поставим в уравнение моделей $U = U_э$ и $I = I_э + \Delta$. Получим:

$$\frac{U_э}{R} - (I_э - \Delta) = 0; \qquad U_э - (I_э + \Delta) R = 0; \qquad \frac{U_э}{I_э + \Delta} = R = 0.$$

Введем функции:

$$Z_1 = \frac{U_э}{R} - (I_э - \Delta); \qquad Z_2 = U_э - (I_э + \Delta) R; \qquad Z_3 = \frac{U_э}{I_э + \Delta} - R.$$

Определим плотность распределений этих величин:

$$f_1(Z_1) = f_2(Z_2) = (\sigma \sqrt{2\pi})^{-1} \exp\left| -(\sigma \sqrt{2})^{-2} \left(Z + I_э - \frac{U_э}{R}\right)^2 \right|;$$

$$f_3(Z_3) = U_э \left|(R + Z)^2 \cdot \sqrt{2\pi} \cdot \sigma\right|^{-1} \exp\left| -(\sigma \sqrt{2})^{-2} \left(\frac{U_э}{R + Z} - I_э\right)^2 \right|.$$

Составим ФФП для всех трех случаев:

$$L_1 = L_2 = (\sigma \cdot \sqrt{2\pi})^{-1} \cdot \exp\left| -(\sigma \sqrt{2})^{-2} \left(I_э - \frac{U_э}{R}\right)^2 \right|;$$

$$L_3 = U_э (\sigma \cdot R^2 \sqrt{2\pi})^{-1} \cdot \exp\left| -(\sigma \sqrt{2})^{-2} \left(\frac{U_э}{R} - I_э\right)^2 \right|.$$

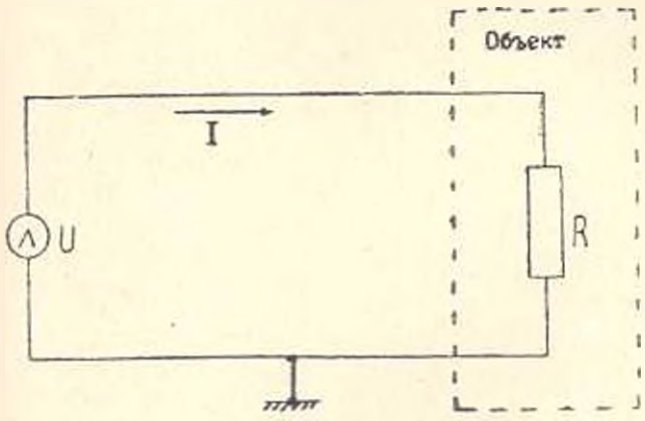

Рис.

Оценки ММФП величины R, максимизирующие последние выражения, получаются для первой и второй модели $\overline{R} = \frac{U_э}{I_э} = 1$ *Ом*, для третьей модели $\overline{R} = \frac{U_э}{I_э}\left(1 + \frac{I_э \sqrt{4\sigma^2 + I_э^2} - I_э - 2\sigma^2}{2\sigma^2}\right) = 1{,}01$ *Ом*.

Поскольку лишь одна из полученных разных по величине оценок должна быть наиболее близка к искомому значению этого параметра, то и она будет являться правильной для метода МФП.

Одним из основных препятствий практического применения ММФП является трудность, а иногда и невозможность определения условной

плотности распределения (5). В подобных случаях предлагается воспользоваться следующим приближенным методом его определения.

Используя методику статистической линеаризации, приведенной в [3], можно написать:

$$\Phi(X_x - F';\ Y_y - E'';\ \overline{B};\ \overline{U}) = F + H_1 \cdot E' + H_2 \cdot E''. \qquad (10)$$

Элементы вектора F определяются как:

$$f_i = \varphi_i + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m} g'_{ij} M(c'_j)^2 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{s} g''_{ij} M(c''_j)^2,$$

где φ_i — элемент вектора $\Phi(X_x;\ Y_y;\ \overline{B};\ \overline{U}$ в (3): $g'_{ij} = \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial^2 X_{xj}}$; $g''_{ij} = \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial^2 Y_{yj}}$.

Элементы векторов H_1 и H_2 определяются как:

$$h_{1ij} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial X_{xj}} + \frac{1}{2} g'_{ij} \frac{M(c'_j)^2}{M(c'_j)^3}; \qquad h_{2ij} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial Y_{yj}} + \frac{1}{2} g''_{ij} \frac{M(c''_j)^2}{M(c''_j)^3}.$$

Обозначив в (10) случайным вектором $E_0 = H_1 \cdot E' + H_2 E''$ для приближенного значения ФФП, можно написать:

$$L(X_x;\ Y_y;\ \overline{B};\ \overline{U}) = P_{E_0/B;\ U}(-F/\overline{B};\ \overline{U}).$$

Заметим, что оптимизация функции (11) методами оптимизации нелинейных функционалов невозможна, т. к. при изменении значений $\overline{B}$ и $\overline{U}$ изменяются значения элементов матриц H_1 и H_2, совместная плотность распределения элементов вектора E_0, а, следовательно, и сама оптимизируемая функция. Поэтому определение оценок ММФП предлагается реализовать с помощью следующей итерационной процедуры.

1. Векторам $\overline{B}$ и $\overline{U}$ задают исходные значения.

2. Для заданных значений $\overline{B}_t$ и $\overline{U}_t$ определяются элементы матриц H_1 и H_2.

3. Определяется функция плотности распределений линейного преобразования случайных векторов E' и E'': $E_0 = H_1 \cdot E' + H_2 \cdot E''$.

4. Для заданных значений $\overline{B}_t$ и $\overline{U}_t$ определяются элементы вектора F и по найденной функции плотности распределений $P_{E_0/B;\ U}(-F/\overline{B};\ \overline{U})$ — значение ФФП в заданной точке.

5. Используя один из методов оптимизации нелинейных функционалов, определяются новые значения оценок $\overline{B}_{t+1}$ и $\overline{U}_{t+1}$, минимизирующие текущую ФФП.

6. Проверяются условия $|\overline{B}_{t+1} - \overline{B}_t| < \varepsilon$; $|\overline{U}_{t+1} - \overline{U}_t| < \varepsilon$ и при их соблюдении определение оценок $\overline{B}$ и $\overline{U}$ заканчивается, в противном случае процесс повторяется, начиная с п. 2.

Է. Ն. ՄԱՆՈՒԿՅԱՆ

ԱՌԱՎԵԼԱՏՈՒՅՆ ՖԻԶԻԿԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼԱՐՏԱՆՄԱՆՈՒԹՅԱՆ ՄԵԹՈԴԻ ՀԻՄՈՒՆՔՆԵՐԸ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Դիտարկվում է բարդ օբյեկտների ներքին պարամետրերի գնահատման խնդիրը։ Առաջարկվում է իրենց իրական արժեքներին ավելի մոտ համարել ներքին պարամետրերի այն արժեքները, որոնց դեպքում օբյեկտում ընթացող ֆիզիկական երևույթները նկարագրող ստոխաստիկ մաթեմատիկական մոդելում առավելագույն հավանականությամբ ապահովվում է մոդելում կիրառված ֆիզիկայի հիմնական օրենքների բավարարումը։ Այս սկզբունքով ստացված ներքին պարամետրերի արժեքները անվանվում են առավելագույն ճշմարտանմանության գնահատականներ։

Բերված է այդ գնահատականների հաշվության վերլուծումը և առաջարկված է նշված գնահատումն իրականացնող խնդրացիայի պրոցեդուրա։

Լ Ի Տ Ե Ր Ա Տ Ո Ւ Ր Ա

1. *Эйкхофф П.* Основы идентификации систем управления. М., «Мир». 1975.
2. *Сейдж Э., Мелье Дж.* Теория оценивания и ее применение в связи и управлении. М., «Связь», 1976.
3. *Голдевский В. С., Захаров А. И.* О косвенном контроле безынерционных систем. «Точность и надежность кибернетических систем», 1977, вып. 5