ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Տեխնիկական գիտութ. սերիա XXXIII, № 4, 1980 Серия технических наук

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА

С. С. ЗАХАРЬЯН

МЕТОД СОКРАЩЕНИЯ РАЗМЕРНОСТИ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ МНОГОСВЯЗНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

Из всего многообразия методов исследования сложных систем можно выделить следующие:

а) методы агрегирования и факторизации [1, 2];

б) методы декомпозиции [3];

в) методы иерархических систем [4, 5].

Несмотря на различие в подходах к постановке задач, методах и получаемых результатах, общим для вышеуказанных трех групп является следующее: над исходной сложной системой осуществляется некоторое преобразование, которое приводит исходную систему к новому виду — новым переменным, либо новой структуре, следовательно, и двух- или трехуровневой иерархической структуре решения сложной проблемы. Задачи анализа, синтеза и оптимизации значительно упрощаются для каждого уровня, хотя к ним добавляется вычислительная процедура взаимосвязи между уровнями или межуровневой координации.

Именно эти признаки и положены в основу предлагаемого в настоящей работе подхода, названного методом уплотнения переменных.

Назовем процессом P преобразование переменных $\vec{X}^{i-1}$ в переменные $\vec{X}^{i}$, причем, они представлены в виде векторов-столбцов размерности $n \times 1$.

Если каждому $\vec{X}^{i-1} \in R^{i-1}$ соответствует единственное значение $\vec{X}^{i} \in R^{i}$, то процесс P представляет собой точечное отображение множества R^{i-1} в R^{i} и может быть обозначен в виде:

$$P: R^{i-1} \to R^{i}. \tag{1}$$

Процессы могут быть обратимыми и необратимыми. Для обратимых процессов наряду с прямым отображением (1) существует обратное отображение $\vec{X}^{i}$ в $\vec{X}^{i-1}$, которое можно записать в виде:

$$P^{-1}: R^{i} \to R^{i-1}. \tag{2}$$

Два или несколько процессов можно объединить в систему. Предположим имеем 2 процесса:

$$P_1 : R_1^{i-1} \to R_1^i; \quad P_2 : R_2^{i-1} \to R_2^i. \tag{3}$$

Объединением этих процессов или системой будет некоторый новый процесс P, вход и выход которого представляет декартово произведение множеств R_1 и R_2. Новая система запишется в виде:

$$P : R^{i-1} \to R^i, \tag{4}$$

причем,

$$R^{i-1} = R_1^{i-1} \times R_2^{i-1}, \quad R^i = R_1^i \times R_2^i. \tag{5}$$

Можно вывести зависимости различных типов объединений — последовательных, параллельных и иерархических. Нас интересует объединение, при котором вход и выход системы являются скалярными произведениями соответственных входов и выходов процессов:

$$y^{i-1} = (\vec{X}_1^{i-1})^T \cdot \vec{X}_2^{i-1}, \quad y^i = (\vec{X}_1^i)^T \cdot \vec{X}_2^i, \tag{6}$$

где T — значок транспонирования;

$$y^{i-1} \in Y^{i-1}; \quad (\vec{X}_1^{i-1})^T \in R_1^{i-1}; \quad y^i \in Y^i; \quad (\vec{X}_2^{i-1})^T \in R_2^{i-1}. \tag{7}$$

Система, полученная путем такого объединения, запишется в виде:

$$(P_1 \cdot P_2) : Y^{i-1} \to Y^i. \tag{8}$$

Теперь обратимся вновь к процессу (1) и введем в рассмотрение совместно с ним некоторый обратимый процесс P_W, осуществляющий преобразование некоторого входного вектора $\vec{W}^i$ в выходной $\vec{W}^{i-1}$. Переменные этого процесса независимы от основных переменных $\vec{X}^{i-1}$ и X^i представлены в виде векторов-строк размерности $1 \times n$. Процесс P_W назовем уплотняющим и запишем в виде:

$$P_W^{-1} : \vec{W}^{i-1} \to \vec{W}^i. \tag{9}$$

Направление протекания процесса (1) примем в качестве основного, тогда направление протекания уплотняющего процесса будет противоположным (обратным), как показано на рис. 1.

1. *Теорема.* Если объединить основной и уплотняющий процессы в систему вида (8) и в качестве уплотняющего процесса использовать основной процесс, т. е.

$$P_W = P, \tag{10}$$

то переменные y^{i-1} и y^i будут равны между собой для любых значений входных переменных системы $\vec{X}^{i-1}$ и $\vec{X}^i$:

$$y^{i-1} = y^i, \tag{11}$$

где

$$y^i = \vec{W}^i \cdot \vec{X}^i; \quad y^{i-1} = \vec{W}^{i-1} \cdot \vec{X}^{i-1}. \tag{12}$$

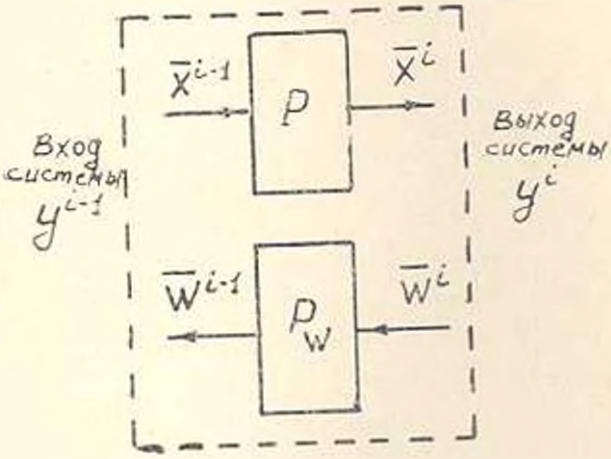

Рис. 1. Уплотнение основного процесса.

Таким образом, на входе и выходе системы имеет место баланс уплотненных переменных y^{i-1} и y^i. Векторы $\vec{W}^i$ и $\vec{W}^{i-1}$ названы уплотняющими.

Если основной процесс (1) является линейным

$$\vec{X}^{i-1} = A\vec{X}^{i-1}, \tag{13}$$

где A — неособенная матрица размерности $n \times n$ с элементами a_{jk} ($\det A \neq 0$), то согласно (9) уплотняющий процесс имеет вид:

$$\vec{W}^{i-1} = \vec{W}^i \cdot A. \tag{14}$$

Применение теоремы уплотнения позволяет существенно сократить размерность ряда задач исследования сложных систем.

Рассмотрим определение уплотняющих функций на примере многосвязной системы автоматического регулирования (МСАР), состоящей из последовательного соединения N звеньев, каждое из которых описывается зависимостью

$$\vec{X}^i(p) = A^i(p)\,\vec{X}^{i-1}(p), \tag{15}$$

где p — оператор Лапласа.

Уравнение такой системы, показанной на рис. 2, имеет вид:

$$\vec{X}^N(p) = A(p)\,\vec{X}^0(p), \tag{16}$$

где

$$A(p) = A^{(N)}(p) \cdot A^{(N-1)}(p) \ldots A^{1}(p). \tag{17}$$

Выражение (14) в этом случае представляет собой систему рекуррентных формул

$$W_k^{i-1}(p) = \sum_{j=1}^{n} a_{jk}^{i}(p)\, W_j^{i}(p), \tag{18}$$

по которым, задаваясь произвольно n значениями величин $W_j^{i}(p)$ для последнего $i=N$ звена, не все из которых могут равняться нулю, можно однозначно вычислить все остальные nN значения уплотняющих функций.

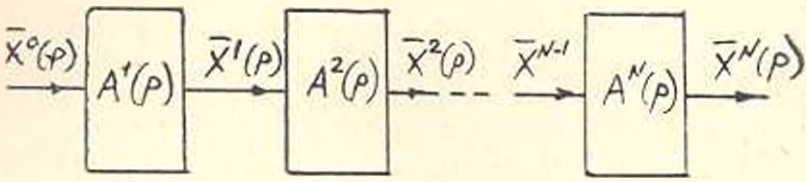

Рис. 2. Блок-схема МСАР.

Выбор уплотняющих функций для последнего N-го звена в каждом конкретном случае может быть обусловлен требованиями задачи. В частности, при анализе МАСР технологических процессов бывают известны передаточные матрицы звеньев $A^{(i)}(p)$, но требуется вычислить не полную матрицу (17), а лишь одну ее строку, соответствующую зависимости одного из выходов системы $x_s^N(p)$ от всех входов x_k $(k=\overline{1, n})$. В этом случае удобно задать для последнего N-го звена значения:

$$W_k^N = 1 \quad \text{при } k = s \quad \text{и} \quad W_k^N = 0 \quad \text{при } k \neq s \tag{19}$$

и далее вычислить уплотняющие функции по (18) для всех звеньев. Уплотняющие функции $W_k^0(p)$ и будут искомыми передаточными функциями для данного выхода x_s^N:

$$x_s^N(p) = \sum_{k=1}^{n} W_k^0(p)\, x_k^0(p). \tag{20}$$

Если через ε обозначить отношение требуемого объема вычислений при перемножении матриц к объему вычислительной процедуры метода уплотнения, то, как видно из графика рис. 3, метод уплотнения эффективен для $n>2$ и выигрыш от сокращения вычислений увеличивается при больших n и N.

Применение уплотнения к системе, показанной на рис. 2, приводит к структурной схеме рис. 4, где звено, осуществляющее операцию скалярного умножения, обозначено значком x. Исследование этой схемы показывает, что если ко входу уплотняющей системы приложить сигнал

$\vec{W}^N$ со значениями (19), то последующие сигналы $\vec{W}^{N-1}$, $\vec{W}^{N-2}$, $\vec{W}^0$ будут равны, соответственно, s-ой строке матриц и их произведений $A^{(N)}$, $A^{(N)} \cdot A^{(N-1)}$, ..., $A^{(N)} \cdot A^{(N-1)}$, ..., $A^{(0)}$. Если же принять, что совместно с этим сигналом ко входу основного процесса приложен сигнал $\vec{Z}^0 = \vec{X}^0$, проекции которого равны

$$Z_k^0 = 1 \quad \text{при } k = j \quad \text{и} \quad Z_k^0 = 0 \quad \text{при } k \neq j, \tag{21}$$

то остальные сигналы

$$\vec{Z}^i = A^{(i)} \vec{Z}^{i-1} \qquad (i = \overline{1, N}) \tag{22}$$

представляют собой столбцы матриц и произведений матриц $A^{(1)}$, $A^{(1)} \cdot A^{(2)}$, ..., $A^{(1)} \cdot A^{(2)}$, ..., $A^{(N)}$. Нетрудно показать, что в этом случае уплотненные сигналы (скаляры) y^0, y^1, ..., y^N равны элементам j^s соответствующих произведений матриц. Следовательно, метод уплотнения согласно схеме рис. 4 позволяет вывести правила для вычисления отдельной строки, столбца или отдельного элемента произведения матриц.

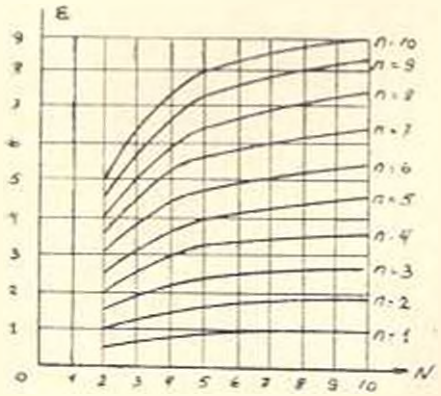

Рис. 3. Степень сокращения вычислений в зависимости от размерности задачи.

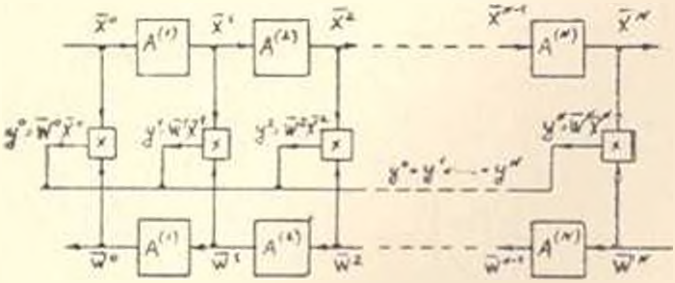

Рис. 4. Структурная схема уплотненной системы.

Вернемся к рассмотрению системы, описываемой выражениями (15)—(17).

Приведем каждое звено к уплотненному виду с помощью (18). Тогда, согласно (11) и (12), можно записать:

$$y^i(p) = \sum_{k=1}^{n} W_k^i(p)\, x_k^i(p); \tag{23}$$

$$y^i(p) = \sum_{k=1}^{n} W_k^{i-1}(p)\, x_k^{i-1}(p). \tag{24}$$

Условимся в качестве $W_k^N(p)$ задавать передаточные функции, соответствующие устойчивому звену.

2. *Теорема.* Если исходная система (15) устойчива, то уплотняющая система, описываемая (24), будет также устойчивой и наоборот.

Таким образом, для анализа устойчивости МСАР вместо исходной системы (15) можно исследовать устойчивость системы (24), полученную путем уплотнения.

Пример. Пусть $n=2$, $N=4$ и передаточные матрицы звеньев имеют вид:

$$A^{(1)}(p) = \begin{Vmatrix} \dfrac{1-T_2p}{1+T_1p} & \dfrac{1-T_2p}{1+T_4p} \\ \dfrac{T_3p(1-T_2p)}{1+T_1p} & \dfrac{2T_3p(1-T_2p)}{1+T_4p} \end{Vmatrix};$$

$$A^{(2)}(p) = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ \dfrac{(1+T_3p)(1+T_2p)}{1-T_2p} & \dfrac{1}{T_3p-1} \end{Vmatrix};$$

$$A^{(3)}(p) = \begin{Vmatrix} 1+T_4p & 1+T_4p \\ \dfrac{1+T_3p}{1-T_2p} & 1 \end{Vmatrix}; \tag{25}$$

$$A^{(4)}(p) = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ \dfrac{1}{1+T_4p} & \dfrac{1}{1+T_3p} \end{Vmatrix}.$$

Задаем $\vec{W}^{(1)}(p) = [1;\ 1]$. По (20) вычисляем остальные уплотняющие функции

$$\vec{W}^{(3)}(p) = \left| \frac{2+T_4p}{1+T_4p};\quad \frac{2+T_3p}{1+T_3p} \right|, \tag{26}$$

$$\vec{W}^{(2)}(p) = \left| \frac{4+(T_3+T_4-2T_2)p-T_2T_4p^3}{1-T_2p};\quad \frac{4+(3T_3+T_4)p+T_3T_4p^2}{1+T_3p} \right| \tag{27}$$

и т. д., вплоть до $i=1$,

$$W_1^{(0)}(p) = \frac{K_1(p)}{1 + (T_1 + T_3)p + T_1 T_3 p^2},$$

$$W_2^{(0)}(p) = \frac{K_2(p)}{1 + (T_3 + T_4)p + T_3 T_4 p^2}. \tag{28}$$

Согласно (24), уравнение уплотненной системы имеет вид:

$$y^0 = y^* = W_1^{(0)}(p)\, x_1^0(p) + W_2^{(0)}(p)\, x_2^{(0)}(p). \tag{29}$$

Из (28) и (29) следует, что эта система имеет корни в левой полуплоскости:

$$p_1 = -\frac{1}{T_1}; \quad p_2 = p_3 = -\frac{1}{T_3}; \quad p_4 = -\frac{1}{T_4} \tag{30}$$

и, следовательно, устойчива. Значит, по вышеприведенной теореме, будет устойчивая и исходная система (16). Тот же результат можно получить, используя обычный метод исследования устойчивости, т. е. перемножить матрицы (25) и решить полученное характеристическое уравнение системы.

Сравнение обоих способов исследования устойчивости показывает, что применение метода уплотнения примерно в n раз сокращает вычислительную процедуру. Для систем большой размерности это приводит к значительному выигрышу в вычислительной процедуре и сокращению требований к объему памяти ЦВМ. Кроме того, применение метода уплотнения и двухуровневой процедуры позволяет провести распараллеливание алгоритмов, что также в несколько раз снижает время вычислений при использовании децентрализованного или распределенного вычислительного комплекса.

Приложение метода уплотнения для исследования системы управления промышленным реактором приведено в [6].

ЕрПИ им. К. Маркса

Поступило 20.VII.1979

Ռ. Ռ. ՁԱԼԱՐՅԱՆ

ՁԱՓՈՂԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ԿՐՃԱՏՄԱՆ ՄԵԹՈԴ ԱՎՏՈՄԱՏ ԿԱՐԳԱՎՈՐՄԱՆ ԲԱԶՄԱԿԱՊ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐԻ ՀԵՏԱԶՈՏՄԱՆ ՀԱՄԱՐ

Ամփոփում

Բերվում է բարդ համակարգի փոփոխականների խտացման մեթոդ, որը թույլ է տալիս համակարգի հետազոտումը ներկայացնել երկմակարդականի պրոցեսի տեսքով։ Ընդ որում կրճատվում է յուրաքանչյուր մակարդակի վրա լուծվող խնդիրների չափողականությունը, ուստի և ընդհանուր խնդրի հաշվման ծավալն ու ժամանակը։

Մեթոդը կիրառվում է երկու դեպքերում՝ համակարգերի փոխանցման ֆունկցիաների որոշման և նրանց կայունության հետազոտման համար։ Ցույց է տրված, որ խտացման մեթոդը զգալիորեն փոքրացնում է հաշվողական աշխատանքների ծավալը այնքան շատ, որքան մեծ է խնդրի չափողականությունը։

Հաշվողական ընթացքի ցուցադրման և մեթոդի էֆեկտիվության գնահատման համար բերված է գծային համակարգերի ուսումնասիրության օրինակ։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Доули Д., Макивелл А.* Факторный анализ как статистический метод. М., «Мир», 1967.
2. *Павловский Ю. Н.* К вопросу об агрегировании и построения иерархических управляющих структур для одного класса сложных систем. «Журн. выч. матем. и мат. физ.», т. 11, № 6, 1971, с. 1510—1520.
3. *Верина Л. Ф., Танаев В. С.* Декомпозиционные подходы к решению задач мат. программирования (обзор). «Экономика и матем. методы», ч. XI, вып. 6, 1975, с. 1161—1172.
4. *Jaudan M. R.* A unified theory of optimal multilevel control. Vol. 22, № 4, 1975, p. 517—524.
5. *Финдайзен В.* Системы с многими уровнями управления. «Автоматика и телемеханика», 1970, № 9, с. 86—95.
6. *Захарьян С. С.* Исследование СХТС методом уплотнения (на примере процесса разложения ДМД). «Докл. I Всесоюзной конференции по мат. модел. СХТС», Ереван, 1975, с. 395—402.