ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Տեխնիկական գիտութ. սերիա XXXIII, № 3, 1980 Серия техничес

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАН

Г. Б. ШАХАЗИЗЯН

О ВЛИЯНИИ ПОЛЗУЧЕСТИ И СТАРЕНИЯ НА УСТОЙЧИВОСТЬ УДЛИНЕННОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛИТЫ

Рассматривается вопрос устойчивости прямоугольной удлинен[ной] шарнирно-опертой и сжимающей по длинным краям гибкой плиты с [на]чальным прогибом и с двухсторонними симметричными тонкими ус[или]вающими покрытиями. Материал покрытий считается упругим, а [для] среднего слоя имеют место соотношения наследственной теории [пол]зучести Маслова—Арутюняна [1].

Вопросы устойчивости при ползучести посвящены многочислен[ные] исследования. Подробная библиография и анализ работ в этой об[ласти] даны в монографиях [2, 4].

§ 1. *Основные зависимости.* Рассматривая слой плиты единичн[ой] ширины (балочная плита) и принимая гипотезу плоских сечений

$$\varepsilon_x = e_x + \varkappa_x z, \qquad (1.1)$$

где e_x — деформация, а $\varkappa_x$ — кривизна срединной поверхности плиты, напряжения в крайних слоях определяются формулой

$$\sigma_{x_{1,2}} = \frac{E_1}{1-\nu_1^2}(e_x \pm \varkappa_x h). \qquad (1.2)$$

В среднем слое, согласно соотношениям [1] имеем

$$\sigma_x(t) = \frac{E_2(t)}{1-\nu^2}[e_x(t) + \varkappa_x(t) z] - \int_{\tau_1}^{t} \frac{E_2(\tau)}{1-\nu^2}[e_x(\tau) + \varkappa_x(\tau) z] R(t,\tau) d\tau, \qquad (1.3)$$

где

$$R(t,\tau) = \gamma(\tau) - \gamma + \frac{E_1(\tau)}{E_2(\tau)} - \frac{D(\tau)}{E_2(\tau)} \int_{\tau}^{t} E_2(y) e^{-\int_{\tau}^{y} \gamma(s) ds} dy. \qquad (1.4)$$

Резольвента ядра ползучести —

$$K(t,\tau) = -E_2(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left\{ \frac{1}{E_2(\tau)} + \varphi(\tau)\left[1 - e^{-\gamma(t-\tau)}\right] \right\}. \qquad (1.5)$$

Здесь

$$\gamma(\tau) = \gamma\,[1 + \varphi(\tau)\,E_2(\tau)]; \qquad D(\tau) = \gamma'(\tau) + \gamma(\tau)\,[\gamma(\tau) - \gamma];$$
$$\varphi(\tau) = C_0 + \frac{A_1}{\tau}; \qquad E_2(\tau) = E_0\,(1 - \beta e^{-\alpha\tau}). \tag{1.6}$$

Для старого материала $\varphi(\tau) = C_0$, $E_2(\tau) = E_0$ и будем иметь

$$R(t, \tau) = \lambda e^{-\eta(t-\tau)}, \qquad \lambda = \gamma E_0 C_0, \qquad \eta = \gamma\,(1 + E_0 C_0). \tag{1.7}$$

Из статических условий имеем:

$$N_x = (\sigma_{x_1} + \sigma_{x_2})\,\Delta + \int_{-h}^{h} \sigma_x\,dz; \qquad M_x = (\sigma_{x_1} + \sigma_{x_2})\,\Delta h + \int_{-h}^{h} \sigma_x z\,dz. \tag{1.8}$$

Используя выражения напряжений в слоях (1.2) и (1.3), из (1.8) получаем

$$N_x(t) = H\left\{[E_2^*(t) + \mu E_1^*]\,e_x(t) - \int_{\tau_1}^{t} E_2^*(\tau)\,e_x(\tau)\,R(t, \tau)\,d\tau\right\},$$
$$M_x(t) = I\left\{[E_2^*(t) + 3\mu E_1^*]\,\varkappa_x(t) - \int_{\tau_1}^{t} E_2^*(\tau)\,\varkappa_x(\tau)\,R(t, \tau)\,d\tau\right\}, \tag{1.9}$$

где

$$E_2^*(t) = \frac{E_2(t)}{1 - \nu^2}; \qquad E_1^* = \frac{E_1}{1 - \nu_1^2}; \qquad \mu = \frac{\Delta}{h}; \qquad H = 2h; \qquad I = \frac{2h^3}{3}\cdot \tag{1.10}$$

Между компонентами перемещения и деформации срединной поверхности плиты имеются зависимости:

$$e_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial w_*}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2\right]; \qquad \varkappa_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cdot \tag{1.11}$$

Здесь $w_0(x)$ — начальная заданная погибь; $w(x, t)$ — погибь от воздействия внешних сил, а $w_*(x, t) = w_0(x) - w(x, t)$.

Примем

$$w_0(x) = f_0 \sin\frac{\pi x}{e}\cdot \qquad w(x, t) = f(t)\sin\frac{\pi x}{e}\cdot \tag{1.12}$$

где f_0 — заданная начальная стрела прогиба, а $f(t)$ — неизвестный, изменяющийся во времени прогиб в середине плиты.

§ 2. *Вариационное уравнение задачи.* Согласно принципу возможных перемещений имеем

$$\int_0^e [N_x(t)\,\delta e_x(t) + M_x(t)\,\delta\varkappa_x(t)]\,dx - P^*(t)\,\delta u(e, t) = 0. \tag{2.1}$$

Здесь принято $u(0, t) = 0$. Сближение краев плиты будет

$$u(l, t) = \frac{1}{2}\int_0^l \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2\right] dx. \qquad (2.2)$$

Подставляя соотношения (1.9), (1.11), (2.2) и (2.1), интегрируя по частям и учитывая граничные условия

$$M_x = 0, \qquad N_x = -P, \qquad \delta w = 0 \quad \text{при} \quad x = 0 \text{ и } x = l, \qquad (2.3)$$

получаем вариационное уравнение

$$\int_0^l \left\{ I\left[E_2^*(t) + 3\mu E_2^*\right]\frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} - I\int_{\tau_1}^{t} E_2^*(\tau)\frac{\partial^4 w(x, \tau)}{\partial x^4} R(t, \tau)\, d\tau - \right.$$

$$\left. - P^*(t)\frac{\partial^2 w_0(x, t)}{\partial x^2}\right\} \delta w(x, t)\, dx = 0. \qquad (2.4)$$

Внося (1.12) в (2.4), интегрируя и вводя обозначения

$$\xi_0 = \frac{f_0}{H}, \qquad \xi(t) = \frac{f(t)}{H}, \qquad E(t) = \frac{E_2^*(t)}{E_2^*},$$

$$P_э^* = \frac{\pi^2 I E_2^*}{l^2}, \qquad P(t) = \frac{P^*(t)}{P_э^*}, \qquad (2.5)$$

получаем неоднородное интегральное уравнение типа Вольтерра относительно $\xi(t)$

$$\left[E(t) + 3\mu - P(t)\right]\xi(t) - P(t)\xi_0 = \int_{\tau_1}^{t} E(\tau)\xi(\tau)R(t, \tau)\, d\tau. \qquad (2.6)$$

Подставляя выражение $R(t, \tau)$ из (1.4) в (2.6), после некоторых преобразований будем иметь

$$\left[E(t) + 3\mu - P(t)\right]\xi(t) - P(t)\xi_0 = \int_{\tau_1}^{t} E(\tau)\xi(\tau)\left[\eta(\tau) - \gamma + \frac{E'(\tau)}{E(\tau)}\right] d\tau -$$

$$- \int_{\tau_1}^{t} D(\tau)\xi(\tau)e^{\int_{\tau_1}^{\tau}\eta(x)dx}\, d\tau \int_{\tau}^{t} E(y)e^{-\int_{\tau_1}^{y}\eta(x)dx}\, dy. \qquad (2.7)$$

Применяя к (2.7) формулу Дирихле о преобразовании двукратного интеграла, дифференцируя по t и обозначая $\dot{\xi}(t) = v(t)$, получаем

$$[E(t)+3\mu-P(t)]\,v(t)=P'(t)\,[\xi(t)+\xi_0]+E(t)\,[\eta(t)-\gamma]\,\xi(t)-$$

$$-E(t)\,e^{-\int_{\tau_1}^{t}\eta(x)dx}\int_{\tau_1}^{t}D(\tau)\,\xi(\tau)\,e^{\int_{\tau_1}^{\tau}\eta(x)dx}\,d\tau. \tag{2.8}$$

Умножая обе части уравнения (2.8) на $e^{\int_{\tau_1}^{t}\eta(x)dx}$, дифференцируя по t и произведя необходимые выкладки, приходим к системе из двух дифференциальных уравнений первого порядка с переменными коэффициентами:

$$\begin{cases}\dot{\xi}(t)=v(t);\\[2mm] \dot{v}(t)=\dfrac{[P(t)-3\mu]\left[\eta(t)-\dfrac{E'(t)}{E(t)}\right]-\gamma E(t)+2p'(t)}{E(t)+3\mu-p(t)}\,v(t)+\\[2mm] \qquad+\dfrac{P''(t)+P'(t)\left[\eta(t)-\dfrac{E'(t)}{E(t)}\right]}{E(t)+3\mu-P(t)}\,[\xi(t)+\xi_0].\end{cases} \tag{2.9}$$

Принимая $t=\tau_1$, из (2.6) и (2.8) получим начальные условия системы дифференциальных уравнений (2.9):

$$\begin{cases}\xi(\tau_1)=\dfrac{P(\tau_1)}{E(\tau_1)+3\mu-P(\tau_1)}\,\xi_0;\\[2mm] v(\tau_1)=\dfrac{P'(\tau_1)[\xi(\tau_1)+\xi_0]+E(\tau_1)[\eta(\tau_1)-\gamma]\,\xi(\tau_1)}{E(\tau_1)+3\mu-P(\tau_1)}.\end{cases} \tag{2.10}$$

§ 3. *Критерий устойчивости.* Примем для рассматриваемой плиты критерий длительной устойчивости [6], согласно которому состояние плиты считается устойчивым, если при постоянной нагрузке скорость нарастания прогиба со временем не увеличивается.

Чтобы удовлетворить этому условию, как следует из (2.9) при $P(t)=P=\mathrm{const}$, должно иметь место неравенство

$$(P-3\mu)\left[\eta(t)-\frac{E'(t)}{E(t)}\right]-\gamma E(t)\leqslant 0 \tag{3.1}$$

или

$$P<\frac{\gamma E(t)}{\eta(t)-\dfrac{E'(t)}{E(t)}}+3\mu. \tag{3.2}$$

Очевидно, в этом случае

$$E(t)+3\mu-P>0, \tag{3.3}$$

и производная скорости (ускорение) будет отрицательной $\dot{V} < 0$.

Таким образом, при значении P, удовлетворяющем неравенству (3.2), скорость нарастания прогиба со временем затухает $(V \to 0)$ и плита не теряет устойчивости. Наибольшее значение силы P, при котором неравенство (3.2) выполняется для любого момента времени, будет

$$P = \frac{\gamma E(\tau_1)}{\gamma(\tau_1) - \frac{E'(\tau_1)}{E(\tau_1)}} + 3\mu. \qquad (3.4)$$

Значение этой силы назовем критической силой длительной устойчивости ($P_{\text{дл}}$).

Если имеет место равенство

$$P = E(\tau_1) + 3\mu, \qquad (3.5)$$

то, как следует из начальных условий (2.10), плита мгновенно теряет устойчивость $(V(\tau_1) \to \infty)$.

Значение силы P, определяемое из условия (3.5), будем называть критической силой мгновенной устойчивости ($P_{\text{мгн}}$).

Обозначая индексом * значения величин, соответствующие времени $t \to \infty$, для старого материала ($\tau_1 = \infty$) будем иметь:

$$P_{\text{мгн}_*} = E_* + 3\mu; \qquad P_{\text{дл}_*} = \frac{E_*}{1 + E_* C_*} + 3\mu. \qquad (3.6)$$

Из анализа выражений (3.4) и (3.5) следует, что возраст материала и относительная толщина усиливающих слоев существенно влияют на значения критических сил мгновенной и длительной устойчивости.

§ 4. *Задачи релаксации.* Определим закон изменения $P(t)$, при котором прогиб плиты остается постоянным во времени $w(x, t) = w(x, \tau_1) = \text{const}$.

Принимая в (2.6) $\xi(t) = \xi(\tau_1) = \xi_1 = \text{const}$, значение которого после приложенной нагрузки $R(\tau_1)$ определяется из первого уравнения начальных условий (2.10), получим:

$$P(t)(\xi_1 + \xi_0) = [E(t) + 3\mu]\xi_1 - \xi_1 \int_{\tau_1}^{t} E(\tau) R(t, \tau)\, d\tau, \qquad (4.1)$$

откуда

$$\frac{P(t)}{P(\tau_1)} = \frac{1}{E(\tau_1) + 3\mu} \left[E(t) + 3\mu - \int_{\tau_1}^{t} E(\tau) R(t, \tau)\, d\tau \right]. \qquad (4.2)$$

Из выражения (4.2) следует, что $P(t)$ монотонно убывающая функция.

§ 5. *Численный пример и основные выводы.* В качестве примера [возь]мем железобетонную плиту под действием постоянной силы $P(t) = P_0 = \text{const}$, при значениях параметров:

$$E_1 = 2 \cdot 10^6 \ кг/см^2; \quad E_ф = 2 \cdot 10^5 \ кг/см^2; \quad C_0 = 0{,}9 \cdot 10^{-5} \ см^2/кг;$$

$$\alpha = 0{,}03 \frac{1}{сутки}; \quad \beta = 1; \quad \gamma = 0{,}026 \frac{1}{сутки}; \quad \nu_1 = \nu = 0{,}3; \quad \xi_0 = 0{,}1.$$

На основании численного интегрирования системы дифференциальных уравнений (2.9) с начальными условиями (2.10), а также уравнения (4.2), произведенного на ЭВМ «ЕС-1020», построены графики на рис. 1—4.

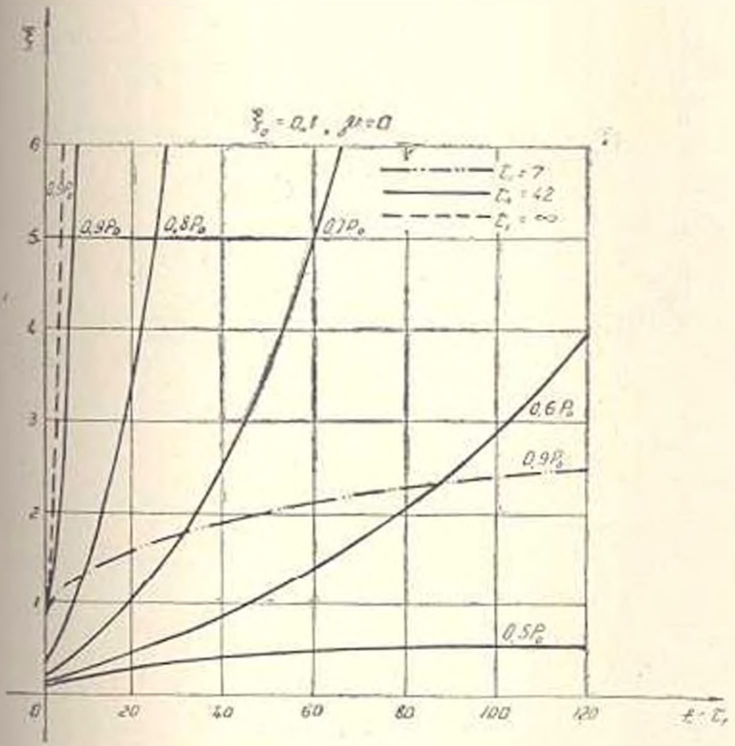

Рис. 1.

Из рис. 3 заключаем, что с увеличением возраста бетона τ_1 и относительной толщины усиливающих слоев μ увеличиваются $P_{мгн}$, $P_{дл}$ и $\frac{P_{дл}}{P_{мгн}}$.

При постоянном прогибе (задача релаксации) отношение $\frac{P(t)}{P(\tau_1)}$ (рис. 4) наиболее уменьшается с увеличением τ_1 и уменьшением μ.

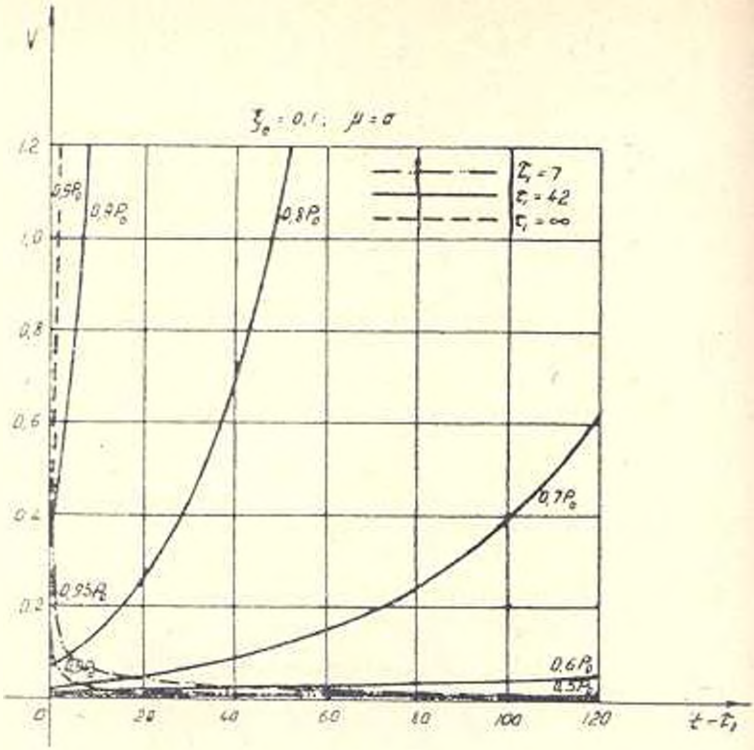
V
$\xi_0 = 0{,}1$; $\mu = 0$
$\tau_1 = 7$
$\tau_1 = 42$
$\tau_1 = \infty$
$0{,}5P_0$
$0{,}9P_0$
$0{,}8P_0$
$0{,}7P_0$
$0{,}95P_0$
$0{,}6P_0$
$0{,}5P_0$
1,2
1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
0
20
40
60
80
100
120
$t-\tau_1$

Рис. 2.

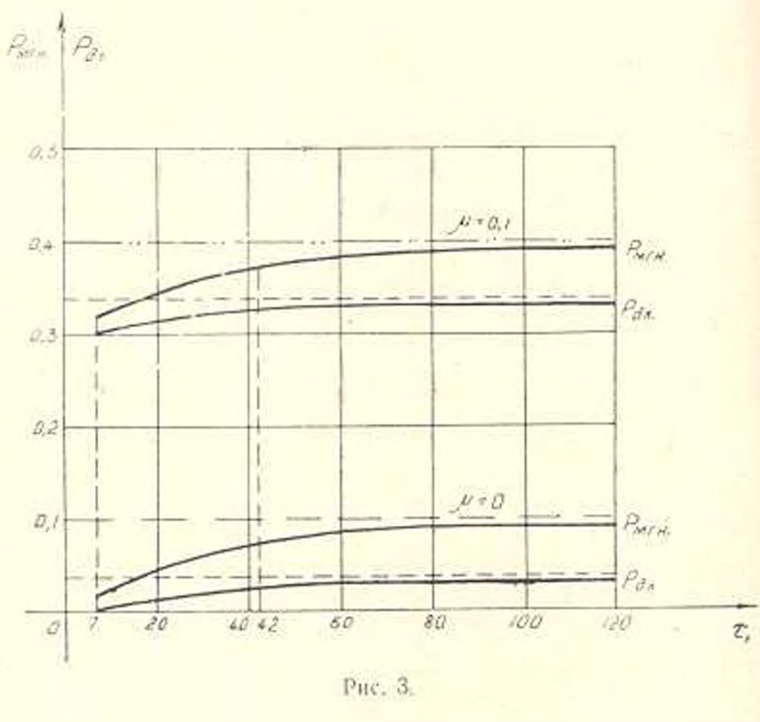
$P_{мгн}$, $P_{дл}$
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
$\mu = 0{,}1$
$P_{мгн.}$
$P_{дл.}$
$\mu = 0$
$P_{мгн.}$
$P_{дл.}$
7
20
40
42
60
80
100
120
τ_1

Рис. 3.

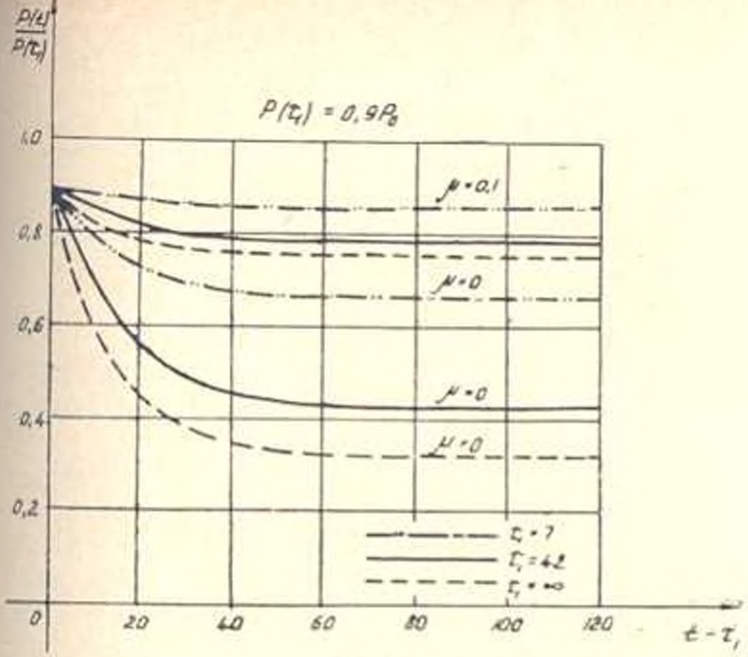

Рис. 4.

Ереванский политехнический
институт им. К. Маркса

Поступило 25.II.1980

Հ. Ռ. ՆԱՀԱՊԵՏՅԱՆ

ՄԵԾ ԵՐԿԱՐՈՒԹՅԱՆ ԵՌԱՇԵՐՏ ՍԱԼԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՎՐԱ ՍՈՂՔԻ ԵՎ ԾԵՐԱՑՄԱՆ ԱԶԴԵՑՈՒԹՅՈՒՆԸ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Հոդվածում բերվում է սկզբնական ճկվածքով մեծ երկարություն ունեցող եռաշերտ սալի կայունության խնդիրը երկար կողմերով սեղմման դեպքում։ Արտաքին շերտերի նյութը ընդունվում է առաձգական, իսկ միջին շերտի համար հաշվի է առնվում սողքը, ըստ Մասլով-Հարությունյանի ժառանգական տեսության։

Հնարավոր տեղափոխումների սկզբունքի հիման վրա կազմված է ինտեգրի վարիացիոն հավասարումը, որը բերվում է առաջին կարգի փոփոխական գործակիցներով երկու դիֆերենցիալ հավասարումներից կազմված համակարգի, որոնց թվային ինտեգրման արդյունքները երկաթբետոնե սալի օրինակի վրա ներկայացված են գրաֆիկների միջոցով։

Սալի ակնթարթային և երկարատև կայունության դեպքերում կրիտիկական ուժի որոշման համար ստացված են անալիտիկ արտահայտություններ։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнян Н. Х.* Некоторые вопросы теории ползучести. М.—Л., ГИТТЛ, 195
2. *Работнов Ю. Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. М., «Нау 1977.
3. *Ржаницын А. Р.* Устойчивость сжатых элементов при ползучести матер «Строительная механика и расчет сооружений», 1959, № 5.
4. *Хофф Н.* Продольный изгиб и устойчивость. М., ИЛ, 1955.
5. *Задоян М. А.* Смешанное вариационное уравнение нелинейного ползучего тел задача выпучивания призматического стержня. «Известия АрмССР, Меха ка», т. XXI, № 2, 1968.
6. *Шестериков С. А.* О критерии устойчивости стержня при ползучести. «Прикл. ме ханика», 1959, № 6.
7. *Букятян Л. Б.* Устойчивость тонкостенных стержней с учетом ползучести мате ла. «Известия АН АрмССР (сер. физ.-мат., естеств. и техн. наук)», т. VI, № 1953.