ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Տեխնիկական գիտութ. սերիա XXXIII, № 1, 1980 Серия технических наук

ЭЛЕКТРОТЕХНИКА

Л. О. КАРАХАНЯН

# ИССЛЕДОВАНИЕ МАГНИТНОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЫ С УЧЕТОМ ВЗАИМНОГО ВЛИЯНИЯ ЧАСТИЦ

В технике связи и радиотехнике, а также в электромашиностроении широко применяются магнитодиэлектрики (МД), представляющие собой смесь ферромагнитных частиц и связующего диэлектрика. Расширение области применения этих материалов сопровождается непрерывным ростом требований к получению определенных сочетаний электромагнитных и механических свойств.

Для выбора оптимальных значений параметров МД необходимо иметь зависимость этих параметров от свойств ферромагнитной и диэлектрической фаз. В настоящее время расчет средних параметров МД осуществляется на основе модельных теорий, в которых приняты упрощающие ограничения. Однако экспериментальные данные средних параметров часто дают существенное расхождение с теоретическими, что объясняется несоответствием основных теоретических предпосылок, на основе которых получены расчетные формулы, и действительных условий. При определении средних параметров МД часто не учитывается то обстоятельство, что феррочастица в МД намагничивается в сложном, неоднородном поле, зависящем от взаимного расположения ближайших частиц. При этом собственное поле феррочастицы должно быть учтено совокупностью диполей и мультиполей высокого порядка.

В статье рассматривается задача расчета средней магнитной проницаемости неоднородной среды, моделирующей МД, со сферическими феррочастицами, расположенными в узлах прямоугольной пространственной решетки при учете взаимного влияния феррочастиц мультиполями до 3-го порядка включительно.

Рассмотрим неоднородную среду со сферическими ферромагнитными включениями одинакового радиуса $a$, помещенную в однородное постоянное магнитное поле $H$. Связь между индукцией в ферромагнитных включениях и напряженностью определяется линейной функцией

$$B = \mu_1 \mu_0 \cdot H, \tag{1}$$

где $\mu_1$ — начальная магнитная проницаемость вещества включений. Магнитная проницаемость среды, окружающей включения, равна $\mu_0$.

Для того, чтобы определить среднюю проницаемость рассматриваемой неоднородной среды, необходимо рассчитать коэффициент $B_1$ [1], пропорциональный среднему дипольному моменту сферических включений. Начало декартовой системы координат совместим с центром некоторой сферы $P$, причем ось $z$ направим параллельно $H$. Обозначим через $Q$ некоторый шар, отличный от $P$.

В рассматриваемой области нет токов. Следовательно,

$$\operatorname{rot} \vec{H} = 0 \tag{2}$$

и

$$\vec{H} = -\operatorname{grad} U, \tag{3}$$

где $U$ — скалярный магнитный потенциал.

Из условия отсутствия источников поля вектора магнитной индукции следует:

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0. \tag{4}$$

Подставив $B = -\mu\mu_0 \operatorname{grad} U$ в (4), можно прийти к уравнению Лапласа $\nabla^2 U = 0$, решение которого для внешней и внутренней (по отношению к сферическому включению $P$) областей определяется выражениями [1]:

$$U_e = \sum_{m,n} (A_n^m r^n + B_n^m r^{-n-1}) P_n^m (\cos\theta) \cos m\varphi; \tag{5}$$

$$U_i = \sum_{m,n} C_n^m r^n P_n^m (\cos\theta) \cos m\varphi; \tag{6}$$

$$n = 1, 3, 5, \ldots, \quad m = 0, 2, 4, \ldots, \quad m < n,$$

где $P_n^m(\cos\theta)$ — присоединенная функция Лежандра первого рода.

Из граничных условий на поверхности сферического включения можно получить связь между коэффициентами $A_n^m$, $B_n^m$ и $C_n^m$:

$$A_n^m = \frac{1 + \nu + 1/n}{1 - \nu} a^{-(2n+1)} B_n^m; \quad C_n^m = \frac{2n + 1}{n + \nu n + 1} A_n^m; \quad \nu = \frac{\mu_1}{\mu_0}. \tag{7}$$

Для определения коэффициентов $A_n^m$, $B_n^m$, $C_n^m$ авторы [1, 2] представляют потенциал $U_e$ точки с координатами $x, y, z$, как результат наложения потенциала внешнего однородного поля $(-Hz)$ и суммы потенциалов всех мультиполей $Q_i$ и $P$ относительно точки $(x, y, z)$:

$$Hz + \sum_{m,n} A_n^m r^n P_n^m (\cos\theta) \cos m\varphi = \sum_{n,m} B_n^m \sum_{Q_i} r^{-n-1} P_n^m (\cos\theta) \cos m\varphi, \tag{8}$$

где $r$, $\varphi$, $\psi$ — сферические координаты точки $(x, y, z)$ относительно центров сфер $Q_s$.

Применяя к выражению (8) оператор

$$L_N^M = \frac{\partial^N}{\partial z^{N-M} \partial x^M} \tag{9}$$

и переходя к пределу при $(x, y, z) \to 0$, получим систему алгебраических уравнений для нахождения коэффициентов $A_N^m$ и $B_N^m$:

$$- H_N - M!\,(N - M)! \sum A_N^m\, a_h (N, m) =$$

$$= \sum_n \sum_m \frac{(n + N - M - m)!}{(n - m)!} B_n^m \sum_{n+N-M,\, m}, \tag{10}$$

где $H_N = 0$ при $N \neq 1$; $H_1 = H$; $h = \frac{1}{2}(M - m)$; $N$, $n = 1, 3, 5, \cdots$;

$m$, $M = 0, 2, 4, 6, \cdots$;

$$a_h = \frac{(n - m)(n - m - 1) \cdots (n - m - 2h + 1)(-1)^h}{4^h \cdot h!\,(m + 1)(m + 2) \cdots (m + h)}\, a_0; \tag{11}$$

$$a_0 = \frac{(n + m)!}{2^m \cdot m!\,(n - m)!}. \tag{12}$$

Вспомогательные коэффициенты $\sum_{n,m}^M$ в (10) определяются только геометрическими характеристиками пространственной решетки, в узлах которой расположены сферические включения.

Рассмотрим случай кубической пространственной решетки ($\alpha = \beta = \gamma$). В этом случае вспомогательные коэффициенты определяются следующим выражением:

$$\sum_{n,m}^M = \alpha^{-(n+M+1)} \cdot S_{n,m}^M; \tag{13}$$

$$M, m = 0, 4, 8, 12, \cdots. \tag{14}$$

Значения $S_{n\,m}^M$ различных порядков определены в [1] и [2]:

$$S = 2{,}092;\; S = 3{,}1059;\; S = 0{,}5733;\; S = 3{,}2592.$$

В большинстве случаев при $n = 3$ (учет мультиполей до третьего порядка включительно) уже достигается удовлетворительная точность средней проницаемости. Поэтому ограничимся решением системы, обрывающемся на $n = 3$. При этом получается система линейных уравнений:

$$\begin{cases} A_1 + 2B_1 \Sigma_2 + 4B_3 \Sigma_4 = H; \\ A_3 + 4B_1 \Sigma_4 + 20\, B_3 \Sigma_6 = 0. \end{cases} \tag{15}$$

Для определения $B_1$ из этой системы выразим $A_1$ и $A_3$ через $B_1$ и $B_3$ по (7):

$$A_1 = \frac{\mu_1 + 2\mu_2}{\mu_2 - \mu_1} a^{-3} B_1; \quad A_3 = \frac{4/3\, \mu_2 + \mu_1}{\mu_2 - \mu_1} a^{-7} B_3. \tag{16}$$

Подставляя значения $A_1$, $A_3$ и $\Sigma_2$, $\Sigma_1$, $\Sigma_0$ по (14) в (15), получим:

$$\left| \begin{aligned} & B_1 \left(4,18\alpha^{-3} + \frac{2\mu_2 + \mu_1}{\mu_2 - \mu_1} a^{-3}\right) + 12,44\, \alpha^{-5} B_3 = -H; \\ & B_1 \cdot 12,44\, \alpha^{-5} + B_3 \frac{4\mu_2 + 3\mu_1}{3(\mu_2 - \mu_1)} a^{-7} + 11,52\, \alpha^{-7} = 0. \end{aligned} \right. \tag{17}$$

Решение полученной системы относительно $B_1$ дает:

$$B_1 = \frac{\left| \frac{4\mu_2 + 3\mu_1}{3(\mu_2 - \mu_1)} a^{-7} + 11,52\, \alpha^{-7} \right| (-H)}{\left| \frac{(4\mu_2 - 3\mu_1)}{3(\mu_2 - \mu_1)} a^{-7} + 11,52\, \alpha^{-7} \right| \left(4,18\, \alpha^{-3} + \frac{2\mu_2 + \mu_1}{\mu_2 - \mu_1} a^{-3}\right) - (12,44)^2 \alpha^{-10}}. \tag{18}$$

Для определения средней (эффективной) магнитной проницаемости выразим расстояние между ближайшими сферами решетки через радиус и объемную концентрацию сферических включений. Используя выражение объемной концентрации включений, можно получить следующую связь:

$$\alpha = a \left(\frac{4\pi}{3p}\right)^{1/3}. \tag{19}$$

Подстановка (18) и (19) в формулу $\mu_{cp} = \mu_2 \left(1 - \frac{4\pi B_1}{\alpha^3 H}\right)$ дает

$$\mu_{cp} = \mu_2 \left[ 1 + \frac{3p(\mu_1 - \mu_2)}{\mu_1 (1 - p) + \mu_2 (p + 2) - \frac{3(\mu_2 - \mu_1)^2 \cdot 154,75\, (a/\alpha)^{10}}{4\mu_2 + 3\mu_1 + 34,56\, (\mu_2 - \mu_1)(a/\alpha)^7}} \right]. \tag{20}$$

Сопоставлением зависимости (20) с формулой Релея можно убедиться, что в (20) имеется дополнительный член $\delta = 34,56\, (\mu_2 - \mu_1)(a/\alpha)^7$. Если при определении $B_1$ учесть только первые вспомогательные коэффициенты $\Sigma_0$ и $\Sigma_1$, то $\delta = 0$ и (20) переходит в формулу Релея.

Оценим влияние дополнительного члена $\delta$ на величину средней магнитной проницаемости при $\mu_1 \to \infty$ и $\mu_2 = 1$. Разделив числитель и знаменатель выражения (20) на $\mu_1$ и переходя к пределу, вместо (20) получим:

$$\mu_{cp} = 1 + \frac{3p}{1 - p - \frac{3 \cdot 154,75\, (a/\alpha)^{10}}{3 - 34,56\, (a/\alpha)^7}}. \tag{21}$$

При максимально возможной объемной концентрации сферических ферромагнитных включений $p_{макс} = \frac{\pi}{6}$ по (21) получаем $\mu_{ср} = 6{,}05$.

По формулам Релея и Лоренц-Лорентца максимальная проницаемость будет 5,82 и 4,28, соответственно. Следовательно, уточнение формулы Релея [1, 2] с помощью дополнительного члена $\delta = 34{,}56\,(\mu_2 - \mu_1)\,(a/a)^7$ дает предельное увеличение $\mu_{ср}$ на 41,3% по сравнению с расчетом по формуле Лоренц-Лорентца.

В таблице приведены расчетные значения средней магнитной проницаемости при разных значениях объемной концентрации $p$ для случая, когда сферы расположены в узлах кубической решетки и $\frac{\mu_1}{\mu_2} \to \infty$.

*Таблица*

| $p$ | Средняя проницаемость по: | | |
|---|---|---|---|
| | Лоренц—Лорентцу | Релею | формуле (20) |
| 0.1 | 1.33 | 1,33 | 1.33 |
| 0.2 | 1.75 | 1,75 | 1.75 |
| 0.3 | 2.29 | 2,3 | 2,32 |
| 0.4 | 3 | 3,18 | 3,21 |
| 0.5 | 4 | 5.4 | 5.6 |
| 0.52 | 4,28 | 5,82 | 6,05 |

Как видно из таблицы, при $p \leqslant 0.4$ расчетные значения $\mu_{ср}$, полученные по формуле Лоренц-Лорентца, мало отличаются от значений, полученных по (21). При больших значениях объемной концентрации ($p \geqslant 0.4$) учет мультиполей 3-го порядка (октуполей) дает существенное увеличение $\mu_{ср}$.

Формулу статической проницаемости (20) можно распространить на случай синусоидального внешнего поля. Подставляя в (20) вместо $\mu_1$ вещества феррочастиц эквивалентную комплексную проницаемость сферической феррочастицы [3], получим выражение средней комплексной проницаемости рассматриваемой неоднородной среды.

## Выводы

1. Получено выражение статической магнитной проницаемости неоднородной среды на основе полного учета дипольного и октупольного взаимодействия намагниченных феррочастиц.

2. Показано, что при высоких концентрациях строгий учет взаимного влияния намагниченных феррочастиц с помощью мультиполей высоких порядков может существенно приблизить расчетные значения $\mu_{ср}$ к экспериментальным.

ЕрПИ им. К. Маркса

Поступило 26. III. 1979

Լ. Հ. ԿԱՐԱԽԱՆՅԱՆ

## ԱՆՀԱՄԱՍԵՌ ՄԻՋԱՎԱՅՐԻ ՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ԹԱՓԱՆՑԵԼԻՈՒԹՅԱՆ ՀԵՏԱԶՈՏՈՒՄԸ ՀԱՇՎԻ ԱՌՆԵԼՈՎ ՄԱՍՆԻԿՆԵՐԻ ՓՈԽԱԶԴԵՑՈՒԹՅՈՒՆԸ

### Ամփոփում

*Հոդվածում ուսումնասիրվում է գնդաձև ֆեռոմագնիսիկներով մագնիսադիէլեկտրիկի համարժեք թափանցելիության կախումը մասնիկների ծավալային կոնցենտրացիայից և գնդիկների մագնիսական թափանցելիություններից։ Արտածվում է անալիտիկ արտահայտություն, որն ստացվում է Լապլասի հավասարման լուծման հիման վրա, հաշվի առնելով ֆեռոմագնիսիկների փոխադարձ ազդեցությունը միմյանց վրա բարձր կարգի մուլտիպոլների միջոցով։*

### ЛИТЕРАТУРА

1. *Rayligh J. W.* On the influence of obstacles arranged in rectangular order upon the properties of a medium. "Phyl. Magazine", 1892, v. 34.
2. *Толмачев С. Т.* Расчет потенциала в прямоугольной пространственной системе сферических элементов, помещенных во внешнее однородное поле. «Электричество», 1974, № 10.
3. *Поливанов К. М.* Ферромагнетики. М., Госэнергоиздат, 1957.