ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Տեխնիկական գիտութ. սերիա XXXII, № 5, 1979 Серия технических наук

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

В. А. АМБАРЦУМЯН

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЧАСТОТ И ФОРМ СВОБОДНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ КАРКАСНЫХ ЗДАНИЙ

Для определения частот и форм свободных нелинейных колебаний систем со многими степенями свободы обычно используются асимптотические методы [1, 2]. Они применимы для систем, характер деформирования которых достаточно близок к линейной зависимости. Вследствие этого функцию, определяющую закон нелинейного деформирования, удается разложить в степенной ряд, содержащий малый параметр. При решении задачи принимается, что формы нелинейных колебаний пропорциональны соответствующим формам линейных колебаний. Аналитическое исследование колебаний произвольных нелинейно-деформируемых систем представляет значительные математические трудности. Многомассовые системы, для которых неприменим асимптотический метод, исследованы в работах [3, 4]. Решение получено с помощью потенциальной функции, использованием свойств геодезических линий в пространстве.

В данной статье определены точные значения частот и форм свободных нелинейных колебаний многомассовых систем, которые являются расчетными схемами многоэтажных каркасных зданий. Применяется метод, представляющий обобщение метода, используемого Дуффингом при исследовании систем с одной степенью свободы [5].

Рассмотрим свободные колебания многоэтажного здания, масса которого сосредоточена на уровнях перекрытий. Принимается, что зависимость между напряжением σ и относительной деформацией ε имеет вид степенной функции:

$$\sigma = B|\varepsilon|^{\mu-1}\varepsilon, \qquad \mu = \frac{1}{r}, \quad r = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots, \tag{1}$$

где $B > 0$, $\mu \leq 1$—постоянные. При $\mu = 1$, $B = E$, E—модуль упругости. Уравнения движения рамной системы с недеформируемыми ригелями имеют вид [6]:

$$m_i \ddot{y}_i + a_{ir}(y_i - y_{i-1})^{\frac{1}{r}} - a_{i+1,r}(y_{i+1} - y_i)^{\frac{1}{r}} = 0, \tag{2}$$

$$i = 1,\ 2 \cdots n, \qquad y_0 = 0, \qquad a_{n+1,r} = 0,$$

где m_i — масса, сосредоточенная на уровне i-го этажа: y_i, $\ddot{y}_i$ — перемещение и ускорение i-ой массы: a_{i_r} — жесткость i-го этажа при нелинейном деформировании:

$$a_{i_r} = \frac{(r+2)^{\frac{1}{r}} \cdot 2^{\frac{r+1}{r}} \sum\limits_{k=1}^{s} BJ_{kr}^{(i)}}{H_i^{\frac{r+2}{r}}}, \quad \text{при} \quad r=1, \quad a_{i1} = \frac{12}{H_i^3} \sum_{k=1}^{s} EJ_{k1}^{(i)};$$

H_i — высота i-го этажа; s — количество стоек этажа; $J_{kr}^{(i)}$ — обобщенный момент инерции k-ой стойки i-го этажа. При прямоугольном сечении колонн с размерами поперечного сечения b и h, J_r определяется выражением [7]:

$$J_r = \frac{bh^{2+\frac{1}{r}}}{2^{2+\frac{1}{r}}\left(1+\frac{1}{2r}\right)}, \quad \text{при} \quad r=1, \quad J_1 = \frac{bh^3}{12}.$$

Уравнения (2) имеют место при r нечетном. При четном r восстанавливающая сила должна быть представлена в виде, аналогичном (1).

Определим периоды и соответствующие им формы свободных колебаний данной системы. Как и в линейных системах, формы колебаний нелинейной системы характеризуются тем, что все массы колеблются с одним и тем же периодом и проходят через положение равновесия одновременно. Тем самым, следуя Р. Розенбергу [4], принимается, что формы колебаний линейной и нелинейной систем имеют одинаковые свойства.

Для решения задачи представим (2) в виде:

$$\frac{d(\dot{y}_i^2)}{dy_i} = -2\frac{a_{i_r}}{m_i}(y_i - y_{i-1})^{\frac{1}{r}} + 2\frac{a_{i+1,r}}{m_{i+1}}(y_{i+1} - y_i)^{\frac{1}{r}}, \quad i = 1, 2, \cdots, n. \tag{3}$$

Интегрируя (3), при начальных условиях $y_i(0) = C_i$, $\dot{y}_i(0) = 0$, получим:

$$\dot{y}_i^2 = -2\frac{a_{i_r}}{m_i}\int\limits_{C_i}^{y_i}(y_i - y_{i-1})^{\frac{1}{r}}\,dy_i + 2\frac{a_{i+1,r}}{m_{i+1}}\int\limits_{C_i}^{y_i}(y_{i+1} - y_i)^{\frac{1}{r}}\,dy_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n. \tag{4}$$

Обозначая $\frac{y_i}{y_n} = \gamma_i$ и учитывая, что при одночастотных колебаниях γ представляется величиной постоянной, получим:

$$y_i'' = -2\frac{a_{ir}}{m_i}\frac{r}{1+r}\left(1-\frac{\gamma_{i-1}}{\gamma_i}\right)^{\frac{1}{r}}\left(y_i^{\frac{1}{r}+1}-C_i^{\frac{1}{r}+1}\right)+$$

$$+2\frac{a_{i+1,r}}{m_{i+1}}\cdot\frac{r}{1+r}\left(\frac{\gamma_{i+1}}{\gamma_i}-1\right)^{\frac{1}{r}}\left(y_i^{\frac{1}{r}+1}-C_i^{\frac{1}{r}+1}\right),\ i=1,\ 2,\cdots,\ n. \tag{5}$$

Разделяя переменные и интегрируя по t от $t=0$ до $t=T/4$ и по y_i от $y_i=C_i$ до $y_i=0$, получим:

$$\frac{T}{4}=\frac{\displaystyle\int_0^1\frac{du}{\sqrt{(1-u^{\frac{1+r}{r}})}}}{\sqrt{2\frac{r}{1+r}\left[\frac{a_{ir}}{m_i}\left(1-\frac{\gamma_{i-1}}{\gamma_i}\right)^{1/r}-\frac{a_{i+1,r}}{m_{i+1}}\left(\frac{\gamma_{i+1}}{\gamma_i}-1\right)^{1/r}\right]}}\cdot C_i^{\frac{1-r}{2r}}, \tag{6}$$

где T—период нелинейных колебаний.

Обозначая

$$\frac{1}{\lambda}=\left(\frac{T\sqrt{2\frac{r}{1+r}\cdot\frac{a_{1r}}{m_1}}}{4I\,C_n^{\frac{r+1}{2r}}}\right)^2;\quad\int_0^1\frac{du}{\sqrt{1-u^{\frac{1+r}{r}}}}=I,$$

$$a_{ir}=a_{1r}\,\alpha_i,\quad m_i=m_1\,\mu_i \tag{7}$$

и имея ввиду, что $C_i^{\frac{1-r}{2r}}=\gamma_i^{\frac{1-r}{2r}}\cdot C_n^{\frac{1-r}{2r}}$

получим:

$$\lambda=\left[\frac{\alpha_i}{\mu_i}(\gamma_i-\gamma_{i-1})^{1/r}-\frac{\alpha_{i+1}}{\mu_{i+1}}(\gamma_{i+1}-\gamma_i)^{1/r}\right]\cdot\frac{1}{\gamma_i},\ i=1,\ 2,\cdots,\ n. \tag{8}$$

В данной системе уравнений входят неизвестные значения периода (выраженного через λ) и соответствующие коэффициенты формы колебаний γ. Уравнение для определения периодов колебаний получим, воспользовавшись граничным условием

$$\gamma_0=y_0/y_n=0. \tag{9}$$

Из (8), при $i=n$, получим

$$\gamma_{n-1}=1-\lambda^r\left(\frac{\mu_n}{\alpha_n}\right)^r,$$

при этом имелось ввиду, что

$$\gamma_n=1;\ \alpha_{n+1}=0.$$

Из системы (8) реккурентным способом определяем:

$$\gamma_{i-1}=\gamma_i-\left(\frac{\mu_i}{\alpha_i}\right)^r\left[\frac{\alpha_{i+1}}{\mu_{i+1}}(\gamma_{i+1}-\gamma_i)^{1/r}+\lambda\gamma_i\right]^r. \tag{10}$$

Уравнение (9) в раскрытом виде имеет вид:

$$\gamma_0 = \gamma_1 - \left(\frac{\mu_1}{\alpha_1}\right)^r \left[\frac{\alpha_2}{\mu_2}(\gamma_2 - \gamma_1)^{1/r} + \lambda\gamma_1\right]^r = 0, \tag{11}$$

где γ_1 γ_2 и вообще γ_i определяются с помощью (10).
С помощью (11) определяются значения λ_j, через которые выражаются значения периодов j-ой формы:

$$T_j = 4I\sqrt{\frac{1+r}{2r}\cdot\frac{m_1}{a_{1r}}\cdot\frac{1}{\lambda_j}}\cdot C_{nj}^{\frac{r-1}{2r}}. \tag{12}$$

После определения λ_j коэффициенты j-ой формы колебаний γ_{ij} вычисляются с помощью (10).

Изложенный метод определения периодов и форм колебаний применим и при линейных колебаниях, т. е. в случае $r=1$. Формула (12) показывает характерную для нелинейных систем зависимость периода от амплитуды колебаний. Период колебаний зависит только от амплитуды перемещения одного этажа (в данном случае n-го), так как форма колебании уже является определенной.

Нами были определены λ_j и γ_{ij}, $j=1, 2, 3$ для многоэтажных зданий, при равных значениях сосредоточенных масс и жесткостей этажей, т. е. при $\alpha_i = \mu_i = 1$. Вычисления проводились при $r=3$. В отличие от случая линейных колебаний, алгебраическое уравнение (11) имеет степень больше n. При этом, степень уравнения (11) зависит от параметра нелинейного деформирования r. Однако, численное исследование уравнения (11) показало, что также имеются n действительных значений λ_j, $j=1, 2, \ldots n$ и соответствующие им n форм колебаний. Как и при линейных колебаниях, первая форма не имеет узловой точки, вторая имеет одну узловую точку и т. д. Полученные значения λ_j, $j=1, 2, 3$ приведены в табл.

Таблица

	Корни урав. (11)		
Этажность	λ_1	λ_2	λ_3
2	0,50999	1,42	
3	0,3328	1,23591	1,475
4	0,24009	0,90591	1,4387
5	0,18459	0,7118	1,2575
6	0,14809	0,6117	1,1756
7	0,12249	0,5312	0,92461
8	0,10399	0,4359	0,749
9	0,08911	0,39899	0,61721
10	0,078	0,31157	0,58998

Значение определенного интеграла I, входящего в формулу (12), определяется выражением [8]:

$$\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^{\frac{1+r}{r}}}} = \frac{r\sqrt{\pi}}{1+r}\,\frac{\Gamma\left(\frac{r}{1+r}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+3r}{2+2r}\right)}, \tag{13}$$

где $\Gamma(r)$—гамма функция (таблицы значений $\Gamma(r)$ имеются в [9]). Чтобы оценить значения периодов нелинейных колебаний, необходимо выразить жесткость нелинейно-деформируемой системы $a_r (r=3)$ через соответствующую жесткость линейной системы a_1. Для этой цели была проведена аппроксимация зависимости $\sigma-\varepsilon$ для малоуглеродистой стали [10] (в области $0<\varepsilon<6\cdot10^{-3}$) степенной функцией вида (1). Получилось, что $B=2{,}1\cdot10^4$ *кг/см*², т. е. $\frac{B}{E}=\frac{1}{100}$. В случае, когда все стойки этажа имеют одинаковые поперечные сечения и $H/h=10$, получим:

$$a_3 = a_1\,\frac{B}{E}\cdot\frac{H^{1,1}}{h^{2,1}}\cdot0{,}73 = 0{,}034\cdot a_1\cdot H^{2,4}. \tag{14}$$

Для системы с одной степенью свободы период нелинейных колебаний определится выражением:

$$T_{(r=3)} = T_{(r=1)}\cdot5{,}04\left(\frac{y_0}{H}\right)^{1/3}. \tag{15}$$

Из (15) следует, что при $y_0/H=1/128$ периоды нелинейных и линейных колебаний совпадают. При меньших значениях $\frac{y_0}{H}$ — $T_{(r=3)}<T_{(r=1)}$. Это объясняется тем, что при малых деформациях жесткость нелинейной системы больше, чем жесткость линейной, а при больших деформациях $\left(\frac{y_0}{H}>\frac{1}{128}\right)$ — наоборот и поэтому $T_{(r=3)}>T_{(r=1)}$. Для пятиэтажного здания, период j-ой формы определится выражением:

$$T_j(r=3) = T_j(r=1)\cdot\left(\frac{C_1}{5H}\right)^{1/3}K_j,\quad K_1=5{,}71,\quad K_2=8{,}451,\quad K_3=9{,}911. \tag{16}$$

Здесь использованы значения $T_j(r=1)$, приведенные в [11]. Как и в случае системы с одной степенью свободы, $T_j(r=3)$ могут быть как больше, так и меньше $T_j(r=1)$. Так, например, при $\frac{C_1}{5H}=\frac{1}{186}$ — $T_1(r=3)=T_1(r=1)$, а при $\frac{C_1}{5H}\geq\frac{1}{186}$ — $T_1(r=3)\geq T_1(r=1)$. При второй и третьей формах $T_2(r=3)$, $T_3(r=3)$ становится большей $T_2(r=1)$, $T_3(r=1)$, соответственно, при $\frac{C_1}{5H}>\frac{1}{605}$ и $\frac{C_1}{5H}>\frac{1}{9\,5}$.

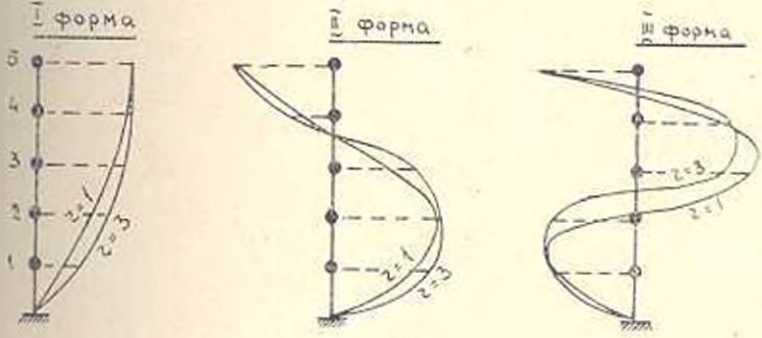

Рис.

Формы колебаний пятиэтажного здания построены на рис., откуда видна идентичность характеров деформирования линейной и нелинейной систем при колебаниях по одному и тому же тону.

Арм НИИСА

Поступило 15.XI.1978.

Վ. Ա. ՀԱՄԲԱՐՁՈՒՄՅԱՆ

ԿԱՐԿԱՍԱՅԻՆ ՇԵՆՔԵՐԻ ԱԶԱՏ ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԻ ՁԵՎԵՐԻ ՈՒ ՀԱՃԱԽԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՈՐՈՇՄԱՆ ՄԻ ՄԵԹՈԴԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Որոշված են բազմահարկ կարկասային շենքերի ազատ, ոչ գծային տատանումների հաճախականությունների և տատանման ձևերի գործակիցների ճշգրիտ մեծությունները այն դեպքում, երբ լարման և հարաբերական դեֆորմացիայի կապը արտահայտվում է աստիճանային ֆունկցիայի տեսքով։

Խնդիրը լուծված է շարժման հավասարումների անմիջական ինտեգրումով։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., «Наука», 1974.
2. *Амбарцумян В. А.* О периодах нелинейных колебаний каркасных зданий. «Известия АН АрмССР (серия Т. Н.)», т. XXIV, № 1, 1971.
3. *Розенберг Р. М.* О формах колебаний нормального типа нелинейных систем с двумя степенями свободы. Сб. переводов «Механика», № 5, 1961.
4. *Розенберг Р. М.* Нормальные формы колебаний нелинейных систем с n степенями свободы. «Тр. Амер. общ. инж.-мех. сер. Е. Прикл. мех.», т. 29, № 1, 1962.
5. *Тимошенко С. П.* Колебания в инженерном деле. М., «Наука», 1967.
6. *Амбарцумян В. А.* К вопросу расчета стержневых систем на сейсмические воздействия при нелинейном законе упругости. Исследования по динамике и сейсмостойкости сооружений. Научн. сообщ. АИСМ, вып. 19, Ереван, 1972.
7. *Качанов Л. М.* Расчет стержней с учетом пластичности и ползучести. Спр. «Прочность, устойчивость, колебания», том 1, М., «Машиностроение», 1968.

8. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962.
9. *Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф.* Специальные функции. М., «Наука», 1968.
10. *Пономарев С. Д., Бидерман В. Л. и др.* Расчеты на прочность в машиностроении, том II. М., Машгиз, 1958.
11. *Хачиян Э. Е., Гороян Т. А.* Рекомендации по определению периодов и форм колебаний каркасных зданий. Ереван, Изд. АИСМ, 1970.