

МАШИНОСТРОЕНИЕ

Ո. Ո. ՕՐԼՅՈՎ, Գ. Բ. ՏԱԳԱՏԵԼՅԱՆ

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ АМПЛИТУДЫ УЛЬТРАЗВУКОВЫХ
 КОЛЕБАНИЙ ПО РАБОЧЕЙ ПОВЕРХНОСТИ
 ПРИТИРОЧНОГО ДИСКА

Пусть притирочный диск 1 (рис. 1) толщиной h получает поперечные ультразвуковые колебания от волновода 2, причем притир крепится к волноводу посредством резьбового соединения. Радиус притира a , а радиус выходного торца волновода равен b .

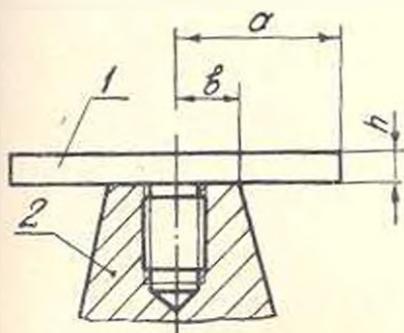


Рис. 1. Схема наложения ультразвуковых колебаний на притир.

При допущениях, что: а) при деформации, нормали к срединной поверхности остаются прямыми и б) нормальные напряжения на площадках, параллельных срединной поверхности, равны нулю, дифференциальное уравнение поперечного смещения срединной поверхности в полярных координатах записывается в виде [1]:

$$\frac{\sigma^2}{\partial t^2} w + \frac{Eh^2}{12(1-\nu^2)} \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] w = 0, \quad (1)$$

где w — поперечное смещение точек срединной поверхности;

h, ρ, ν, E — толщина, плотность, коэффициент Пуассона и модуль упругости материала притира; t, E, l — время, радиус и полярный угол.

Решение уравнения (1) отыскивается в виде $w = \omega(r, \varphi) \cos \omega t$, где $\omega = 2\pi f$ — круговая частота накладываемых на притир ультразвуковых колебаний. После введения обозначения $r = a\lambda$, где λ — безразмерная величина, причем $0 < \lambda < 1$, уравнение (1) принимает вид.

$$\left[\frac{\sigma^2}{\partial \lambda^2} + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] \omega - k^2 \omega = 0, \quad (2)$$

где

$$k^2 = \frac{12(1-\nu^2) \rho \omega^2 a^4}{Eh^2} \quad (3)$$

Решение уравнения (2) отыскивается в виде $w(r, \varphi) = W(r) \cos n\varphi$, где n — число возникающих на поверхности притира узловых диаметров. После подстановки, (2) распадается на два дифференциальных уравнения:

$$\frac{x^2 W}{d(kr)^2} + \frac{1}{kr} \frac{dW}{d(kr)} + \left[1 - \frac{n^2}{(kr)^2} \right] W = 0; \quad (4)$$

$$\frac{d^2 W}{d(kr)^2} + \frac{1}{kr} \frac{dW}{d(kr)} - \left[1 + \frac{n^2}{(kr)^2} \right] W = 0. \quad (5)$$

Решениями уравнения (4) являются функции Бесселя порядка n первого $J_n(kr)$ и второго $Y_n(kr)$ рода, а уравнения (5) — функции Бесселя от мнимого аргумента первого $I_n(kr)$ и второго рода $K_n(kr)$. Следовательно, распределение амплитуды УЗК по рабочей поверхности притира в общем случае имеет вид:

$$w = [C_1 J_n(kr) + C_2 Y_n(kr) + C_3 I_n(kr) + C_4 K_n(kr)] \cos n\varphi, \quad (6)$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 — постоянные интегрирования.

Значения функций Бесселя можно рассчитывать по известным формулам [2]:

$$J_0(x) = 1 - \left(\frac{1}{2}x\right)^2 + \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^4}{1^2 \cdot 2^2} - \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^6}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2} + \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^8}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2} - \dots;$$

$$J_1(x) = \frac{1}{2}x - \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^3}{1^2 \cdot 2} + \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^5}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3} - \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^7}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 4} + \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^9}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2} - \dots;$$

$$I_0(x) = 1 + \left(\frac{1}{2}x\right)^2 + \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^4}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^6}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2} + \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^8}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 \cdot 5} + \dots;$$

$$I_1(x) = \frac{1}{2}x + \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^3}{1^2 \cdot 2} + \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^5}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3} + \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^7}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 4} + \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^9}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 \cdot 5} + \dots;$$

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi} \left(C + \ln \frac{x}{2} \right) J_0(x) + \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^2}{(1!)^2} -$$

$$- \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^4}{(2!)^2} \left(1 + \frac{1}{2} \right) + \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^6}{(3!)^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) - \dots;$$

$$Y_1(x) = \frac{2}{\pi} \left(C + \ln \frac{x}{2} \right) J_1(x) - \frac{2}{\pi x} -$$

$$- \frac{1}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!(p+1)!} \left(\frac{x}{2} \right)^{2p+1} \left\{ 2 \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{p} \right) + \frac{1}{p+1} \right\};$$

$$K_0(x) = - \left(C + \ln \frac{x}{2} \right) I_0(x) +$$

$$+ \frac{\left(\frac{1}{2} x \right)^2}{(1!)^2} + \frac{\left(\frac{1}{2} x \right)^4}{(1!)^2} \left(1 + \frac{1}{2} \right) + \frac{\left(\frac{1}{2} x \right)^6}{(3!)^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) + \dots;$$

$$K_1(x) = \left(C + \ln \frac{x}{2} \right) I_1(x) -$$

$$- \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!(1+p)!} \left(\frac{x}{2} \right)^{2p+1} \left\{ 2 \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{p} \right) + \frac{1}{p+1} \right\},$$

где $C=0,5772157$ —постоянная Эйлера

Для определения постоянных интегрирования C_1, C_2, C_3, C_4 предлагается следующая классификация возможных конструкций закрепления притира (рис. 2). Вследствие того, что присоединение не должно вносить рассогласования в акустическую систему «магнитострикционный преобразователь—волновод», притир может быть закреплен либо в точках пучностей волновода (рис. 2а, б), либо в точках узлов (рис.

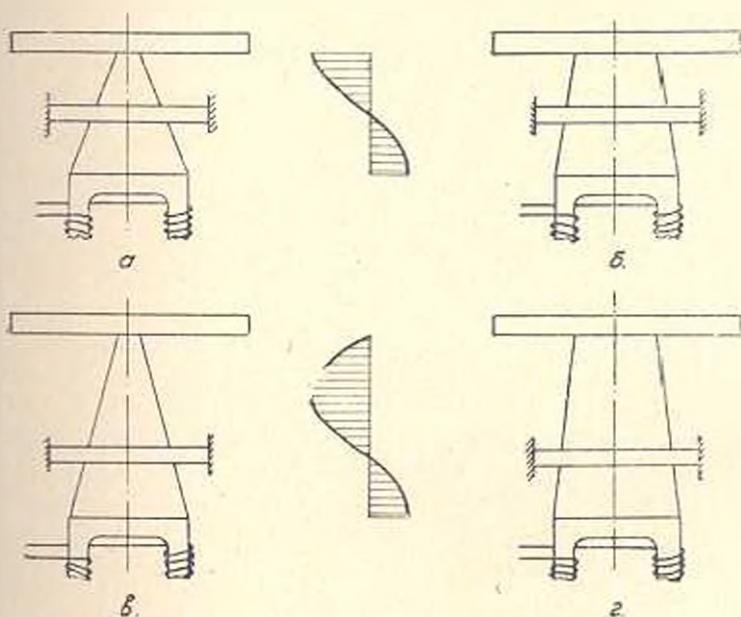


Рис. 2. Возможные варианты крепления притира к волноводу.

2в, г). Причем, если $b < 0,1 a$ (рис. 2а, в), то колебания притира с достаточной точностью описываются колебаниями свободной пластины и тогда $C_2=C_1=0$ [3], а при $0,1 a < b < a$ (рис. 2б, г)—колебаниями кольцевой пластины.

При работе по схемам, приведенным на рис. 2а, б, форма колебаний притира не имеет узловых диаметров, т. е. возможны только узловые

окружности, а на рис. 2в, г возможны только формы колебаний притира с узловыми диаметрами. Поэтому имеют место следующие случаи распределения амплитуды УЗК по рабочей поверхности притира:

$$1\text{-й случай (рис. 2а)} - w = C_1 J_0(kr) + C_2 J_0(kr); \quad (6.1)$$

$$2\text{-й случай (рис. 2б)} - w = C_2 J_0(kr) + C_3 Y_0(kr) + C_4 I_0(kr) - C_5 K_0(kr); \quad (6.2)$$

$$3\text{-й случай (рис. 2в)} - w = [C_1 J_n(kr) + C_2 I_n(kr)] \cos n\varphi; \quad (6.3)$$

4-й случай (рис. 2г) — формула (6).

Постоянные интегрирования C_1, C_2, C_3, C_4 определяются из граничных условий. На наружном контуре притира ($\lambda=1$) должны выполняться равенства:

$$M_r = 0; \quad (7)$$

$$V = Q_r - \frac{\partial M_{\varphi\varphi}}{r d\varphi} = 0, \quad (8)$$

где $M_r, M_{\varphi\varphi}$ — изгибающий и крутящий моменты; Q_r, V — поперечная и обобщенная поперечная силы.

Величины, входящие в (7) и (8), могут быть определены из формул [4]:

$$M_r = -D \left[\frac{D^2 w}{dr^2} + \nu \left(\frac{1}{r} + \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) \right]; \quad (9)$$

$$Q_r = -D \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right]; \quad (10)$$

$$M_{\varphi\varphi} = (1-\nu) D \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial r d\varphi} - \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right), \quad (11)$$

где $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ — цилиндрическая жесткость.

Еще два уравнения могут быть определены из условий на внутреннем контуре притира ($\lambda=b/a$). Обычно в литературе они записываются в виде:

$$w = 0; \quad (12)$$

$$\frac{\sigma w}{\partial r} = 0. \quad (13)$$

Однако, как видно из рис. 2, уравнение (12) справедливо лишь для случаев закрепления притира в узловых точках волновода. Для случаев 1 и 2 можно предложить вместо (12) пользоваться уравнением

$$w = A, \quad (14)$$

где A — амплитуда колебаний выходного торца волновода.

Рассмотрим в качестве наиболее простого примера определение постоянных интегрирования для 1-го случая, т. е. при $b \ll 0,1a$ и закреплении притира в пучности волновода.

Подставляя уравнение (6.1) в (9), (10) и (11), а полученные значения M_1 , Q_1 и M_2 — в (7) и (8), получаем:

$$-C_1 [kJ_0(k) - (1-\nu)J_1(k)] + C_2 [kl_0(k) - (1-\nu)l_1(k)] = 0; \quad (15)$$

$$C_1 J_1(k) + C_2 l_1(k) = 0. \quad (16)$$

При этом используются правила дифференцирования функций Бесселя:

$$\frac{d}{dx} J_n(x) = \frac{n}{x} J_n(x) - J_{n-1}(x);$$

$$\frac{d}{dx} I_n(x) = \frac{n}{x} I_n(x) + I_{n-1}(x).$$

Исключением из (15) и (16) C_1 и C_2 , приходим к уравнению:

$$\frac{J_0(k)}{J_1(k)} + \frac{l_0(k)}{l_1(k)} = \frac{2(1-\nu)}{k}. \quad (17)$$

Для $\nu = 0,25$ (материал притира—чугун) первые четыре корня (17) равны: $k_1 = 2,982$; $k_2 = 6,192$; $k_3 = 9,362$; $k_4 = 12,519$. Каждый из корней k_i физически характеризует частоту колебаний притира с количеством узловых окружностей, равным i .

После подстановки k_i в (15) и (16), эти уравнения вырождаются в одно, а уравнение (13) выполняется тождественно. Здесь становится очевидным значение введенного нами уравнения (11), которое в данном случае записывается в виде:

$$C_1 J_0(\nu) + C_2 I_0(0) = A.$$

причем, вследствие того, что $J_0(0) = 1$ и $I_0(0) = 1$, имеем $C_1 + C_2 = A$. На основании последнего уравнения, выродившегося в одно уравнение (15) и (16), получаем значения постоянных интегрирования C_1 и C_2 , приведенные в таблице.

Таблица

Постоянные интегрирования для схемы на рис. 2а

Собственное число	Постоянные интегрирования	
	C_1	C_2
k		
2,982	1,0965 A	-0,0965 A
6,192	0,9968 A	-0,0032 A
9,362	1,00013 A	-0,00013 A
12,519	0,9999944 A	-0,0000056 A

По данным таблицы и уравнению (6.1) построены кривые распределения амплитуды наложенных на притир УЗК вдоль его радиуса (рис. 3).

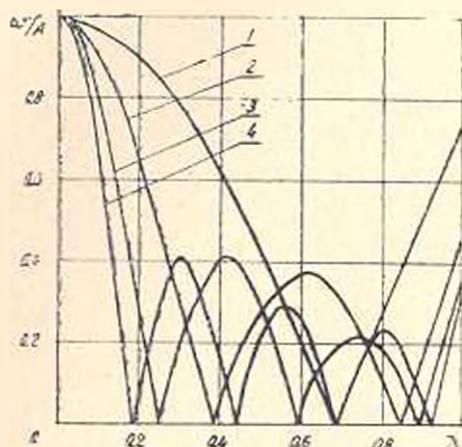


Рис. 3. Распределение амплитуды УЗК для случая на рис. 2а при одной (1), двух (2), трех (3) и четырех (4) узловых окружностях.

Предложенная методика дает возможность прогнозировать величину съема обрабатываемого материала при ультразвуковой доводке. Съем определяется в виде:

$$Q = \mu \sum_{j=1}^m K_j L_j, \quad (18)$$

где K_j — интенсивность изнашивания при j -том дискретном значении амплитуды УЗК, численно равная массе удаленного материала заготовки при ее перемещении по поверхности притира на 1 мм; L_j — длина дуги контакта заготовки с областью притира, имеющей j -тое дискретное значение амплитуды УЗК; m — количество дискретно различающихся значений амплитуды УЗК; μ — количество повторяющихся циклов.

Интенсивность изнашивания обрабатываемого материала K_j может быть определена для фиксированных значений давления, рода и зернистости абразива, материала притира и т. д. путем моделирования на специальном стенде, позволяющим накладывать на один из элементов изнашиваемой пары УЗК с данным j -тым значением амплитуды.

Если известна траектория движения заготовки по притиру и радиусы, ограничивающие данное j -тое значение амплитуды УЗК, то длина дуги контакта L_j может быть определена известными методами [5].

Изложенная методика определения амплитуды УЗК для любой точки притира внедрена на Арзининском производственном объединении «Кристалл» для назначения режимов ультразвуковой доводки изделий из монокристаллического корунда.

Գ. Ն. ՈՐԸՈՎ, Ն. Ռ. ՍՄՂԱԹՅԱՆ

ԿԻՊԱՆՂԿԻՉ ՍԿԱՎԱՌԱԿԻ ԲԱՆՎՈՐՈՒՄԱՆ ՄԱՍԻՆԲԵՎՈՒՅԻՆ ՎՐԱ
ՈՒՏՐԱՉՈՒՅՆԱՅԻՆ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԻ ԱՐՊՈՒՏՈՒՄԻ ԲԱՇԽՈՐԹԸ

Ա մ փ ո փ ու ռ մ

Կիպանղկիչի բանվորական մակերևույթի վրա ուլտրաձայնային տատանումների ամպլիտուդի բաշխումը որոշվում է արտաքին պարագծով ազատ կլոր սալիկի տատանումների դիֆերենցիալ հավասարման լուծումից: Առաջարկված է կրպանղկիչի՝ ալիքատարին ամրացնելու պայմանների դասակարգում:

Տրված է բանաձև հաշվարկելու մշակվող նյութի հանման շափք բաժանման ինստենսիտիթյան և հպման ազնդների երկարությունն այն տիրույթների հետ, որոնք ունեն ուլտրաձայնային տատանումների ամպլիտուդի արված դիսկրետ արժեքը:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Southwell R. V. On the free vibrations of a uniform circular disc clamped at its centre and on the effect of rotation. Proc. Roy. Soc. of London (A), 1922 v. 101, p. 133.
2. Двайт Г. Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. М., «Наука», 1978, с. 161—169.
3. Гонткевич В. С. Собственные колебания пластинок и оболочек. Киев, «Наукова думка», 1964, с. 35—57.
4. Тимошенко С. П. Пластины и оболочки. М.—Л., Гостехиздат, 1918, с. 250.
5. Орлов П. Н. и др. Доводка прензионных деталей машин. М., «Машиностроение», 1978, с. 134—154.

