ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Տեխնիկական գիտութ. սերիա XXXII, № 4, 1979 Серия технических наук

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

Л. Г. ПЕТРОСЯН, С. Г. РУБАНОВИЧ

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ «ГИБКАЯ АРКА— ЖЕСТКАЯ БАЛКА»

Проблема динамики комбинированных систем, испытывающих воздействие подвижных нагрузок, является актуальной задачей строительной механики. Свободные колебания комбинированных систем исследовали многие ученые: одним из первых была работа [1]. Свободные и вынужденные колебания комбинированных систем исследованы также А. Ф. Смирновым, С. Н. Конашенко, В. А. Смирновым, Г. Я. Куиносом и др. [2—5].

Нами сделана попытка выбрать другой путь определения частот свободных колебаний комбинированных систем, причем, не только низших частот, но и совокупность частот для комбинированной системы «гибкая арка — жесткая балка».

Рассмотрим свободные колебания этой комбинированной системы. Интегродифференциальное уравнение колебаний этой арки имеет вид

$$\frac{\partial^4 \eta}{\partial x^4}+\frac{H}{E_б J_б}\cdot\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}-\frac{\Delta H}{E_б J_б}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+\frac{m}{E_б J_б}\cdot\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}=0. \tag{1}$$

Это уравнение получается при следующих предпосылках: ось арки очерчена по квадратной параболе, стойки нерастяжимы и несжимаемы, жесткость балки постоянна по всему пролету, масса пролетного строения распределена по длине балки жесткости. Динамическая часть распора, которая получается при рассмотрении деформированного состояния элемента арки, имеет следующий вид:

$$\Delta H=-\frac{\dfrac{d^2 y}{dx^2}}{\dfrac{l}{E_a F_a}(1+8n^2)}\int_0^l \eta\, dx, \tag{2}$$

где $n=f/l$, а ось арки очерчена по квадратной параболе $y=\frac{4f}{l^2}x(l-x)$.

Для решения интегродифференциального уравнения (1) полагаем

$$\eta = \eta_{k} A \sin (pt + \nu), \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{q}{H}. \tag{3}$$

Из (2) и (3) $\Delta H(t)$ выражается в виде:

$$\Delta H(t) = -\left(\frac{qE_a F_a}{Hl(1+8n^2)} A \int_0^l \eta_k \, dx\right) \sin (Pt - \nu) = \Delta H A \sin (Pt + \nu). \tag{4}$$

Теперь рассмотрим уравнение для η_k. Из (1), (2) и (4) получаем

$$E_б J_б \frac{\partial^4 \eta_k}{dx^4} + H \frac{\partial^2 \eta_k}{dx^2} - \frac{q^2 E_a F_a}{H^2 l (1+8n^2)} \int_0^l \eta_k \, dx - mp^2 \eta_k = 0. \tag{5}$$

Форма стоячей волны апроксимируется рядом Фурье:

$$\eta_k = \sum_{j=1}^{\infty} C_j \frac{\sqrt{2l}}{j\pi} \sin j \frac{\pi x}{l}. \tag{6}$$

Тогда умножая (5) на $\sin \frac{i\pi x}{l}$ и интегрируя от 0 до l, получаем

$$E_б J_б C_i \frac{\sqrt{2l}}{i\pi}\left(\frac{i\pi}{l}\right)^4 \int_0^l \sin^2 \frac{i\pi x}{l} \, dx - HC_i \left(\frac{i\pi}{l}\right)^2 \frac{\sqrt{2l}}{i\pi} \int_0^l \sin^2 \frac{i\pi x}{l} dx -$$

$$- \frac{q^2 E_a F_a}{lH^2 (1+8_e^2)} \sum_{j=1}^{\infty} C_j \frac{\sqrt{2l}}{j\pi} \left(\int_0^l \sin \frac{j\pi x}{l} dx\right) \int_0^l \times$$

$$\times \sin \frac{i\pi x}{l} dx - mp^2 C_i \frac{\sqrt{2l}}{i\pi} \int_0^l \sin^2 \frac{i\pi x}{l} dx = 0. \tag{7}$$

Имея виду значения следующих интегралов

$$\int_0^l \sin^2 \frac{i\pi x}{l} dx = \frac{1}{2} l \quad \text{и} \quad \int_0^l \sin \frac{i\pi x}{l} dx = -\frac{l\left[(-1)^i - 1\right]}{i\pi},$$

уравнение (7) примет вид:

$$E_б J_б C_i \left(\frac{i\pi}{l}\right)^4 \frac{l}{2} - HC_i \left(\frac{i\pi}{l}\right)^2 \frac{l}{2} -$$

$$- \frac{q^2 E_a F_a}{lH^2 (1+8n^2)} \sum_{j=1}^{\infty} C_j \frac{l^2\left[(-1)^j - 1\right]}{j\pi} \frac{\left[(-1)^i - 1\right]}{i\pi} - mp^2 C_i \frac{l}{2} = 0$$

или после простых преобразований —

$$E_б J_б C_i \left(\frac{i\pi}{l}\right)^4 - HC_i \left(\frac{i\pi}{l}\right)^2 -$$

$$- \frac{2q^2 E_a F_a}{H^2(1+8n^2)} \frac{[(-1)^i - 1]}{i\pi} \sum_{j=1}^{\infty} C_j \frac{[(-1)^j - 1]}{j\pi} - mp^2 C_i = 0. \qquad (8$$

Для решения уравнения (8) обозначим:

$$A = E_б J_б \left(\frac{\pi}{l}\right)^4; \qquad (9)$$

$$B = H\left(\frac{\pi}{l}\right)^2; \qquad C = \frac{2q^2 E_a F_a}{H^2 (1+8n^2)}; \qquad (10)$$

$$a_i = \frac{1-(-1)^i}{i\pi}. \qquad (11)$$

С увеличением степени усиления балки аркой параметр C увеличивается, а простой балке соответствует значение $C = 0$.

Тогда (8) переписывается в виде (i — нечетное)

$$Ai^4 C_i - C_i Bi^2 - Ca_i \sum_{j=1}^{\infty} C_j a_j - mp^2 C_i = 0.$$

Обозначим

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} C_j a_j,$$

тогда

$$C_i Ai^4 - C_i Bi^2 - Ca_i x - mp^2 C_i = 0,$$

$$C_i = \frac{Ca_i x}{Ai^4 - Bi^2 - mp^2}.$$

Имеем (все i—нечетные, в противном случае $a_i = 0$)

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} C_{2j-1} a_{2j-1} =$$

$$= Cx \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a^2_{2j-1}}{A(2j-1)^4 - B(2j-1)^2 - mp^2}$$

или $x = 0$, тогда $C_{2j-1} A(2j-1)^4 - C_{2j-1} B(2j-1)^2 = mp^2 C_{2j-1}$, т. е. C_{2j-1} отлично от нуля для одного-двух значений j. Если для одного, то $x \neq 0$, поэтому нужно выяснить, может ли выражение $A(2j-1)^4 - B(2j-1)^2$ иметь одинаковое положительное значение при двух различных натуральных j. Это зависит от A и B, но это невозможно, т. к. по формуле Виетта можно записать:

$$\frac{mp^2}{A} = -(2j_1-1)^2\cdot(2j_2-1)^2 < 0,$$

где j_1 и j_2 — искомые значения j, а значит $x \neq 0$ и

$$1 = C\sum_{j=1}^{\infty}\frac{a^2_{2j-1}}{A(2j-1)^4 - B(2j-1)^2 - mp^2}. \tag{12}$$

Вычислим сумму

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{a^2_{2j-1}}{A(2j-1)^4 - B(2j-1)^2 - mp^2}. \tag{13}$$

Согласно (11) эта сумма имеет вид:

$$\frac{4}{\pi^2}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{(2j-1)^2\left[A(2j-1)^4 - B(2j-1)^2 - mp^2\right]}. \tag{14}$$

Обозначим $y = (2j-1)^2$, тогда

$$\frac{1}{y^2(Ay^2 - By - mp^2)} = \frac{\gamma_1}{y-y_1} + \frac{\gamma_2}{y-y_2} + \frac{\gamma_3}{y},$$

где $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, — некоторые коэффициенты, а y_1 и y_2 — корни уравнения

$$Ay^2 - By - mp^2 = 0. \tag{15}$$

После приведения к общему знаменателю запишем

$$1 = \gamma_1(y-y_2)\,y + \gamma_2(y-y_1)\,y + \gamma_3(y-y_1)(y-y_2).$$

Учитывая, что $(y-y_1)(y-y_2) = y^2 - \frac{B}{A}\,y - \frac{mp^2}{A}$ и приравнивая коэффициенты, при одинаковых степенях y в левой и правой части, получим:

$$\begin{array}{l|l} y^2 & \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 0; \\ y & -\gamma_1 y_1 - \gamma_2 y_2 - \gamma_3\dfrac{B}{A} = 0; \\ 1 & -\gamma_3\dfrac{mp^2}{A} = 1; \end{array} \qquad \left|\begin{array}{l} \gamma_1 + \gamma_2 = \dfrac{A}{mp^2}; \\ y_1\gamma_1 + y_2\gamma_2 = \dfrac{B}{mp^2}; \end{array}\right.$$

$$\gamma_3 = -\frac{A}{mp^2}; \qquad \gamma_2(y_1-y_2) = \frac{Ay_1 - B}{mp^2};$$

$$\gamma_2 = \frac{Ay_1 - B}{(y_1-y_2)\,mp^2}.$$

Окончательно

$$\gamma_3 = -\frac{A}{mp^2}, \quad \gamma_2 = \frac{Ay_1 - B}{(y_1 - y_2)\,mp^2}, \quad \gamma_1 = \frac{Ay_2 - B}{(y_2 - y_1)\,mp^2}. \tag{16}$$

Теперь сумма (14) принимает вид:

$$\frac{4}{\pi^2}\left(\gamma_1 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(2j-1)^2 - y_1} + \right.$$

$$\left. + \gamma_2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(2j-1)^2 - y_2} + \gamma_3 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(2j-1)^2}\right). \tag{17}$$

Для произвольного z вычислим сумму

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(2j-1)^2 - z^2} = \Phi(z) \tag{18}$$

для случаев:

а) $\Phi(z)$ имеет простые полюса в точках $\pm(2j-1)$, $j = 1, \ldots$, в тех же точках имеет полюса и функция $tg\,\frac{\pi}{2}z$;

б) $\Phi(z) = \frac{1}{2z}\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z-(2j-1)} - \frac{1}{z+(2j-1)}\right)$.

Отсюда видно, что $\Phi(z)\,2z$ периодична с периодом 2, а в точках вида $2j-1$, $j = 0, \pm 1, \ldots$ имеет вычеты, равные единице.

Функция $\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}z$ в точке $z = 2j-1$ имеет вычет $\lim\limits_{z\to 2j-1}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}z\right)\cdot$ $\cdot(z-2j-1)$, равный $\lim\limits_{z\to 2j-1} -\frac{1}{\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{2}z}} = -\frac{2}{\pi}$, кроме того $\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}z$ периодична с периодом 2.

Из этих трех утверждений следует, что функция $2z\Phi(z) + \frac{\pi}{2}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}z$ не имеет полюсов (они сокращаются). Эта функция периодична с периодом 2 и в полосе $0 < R_e z < 2$ ограничена, поэтому она ограничена во всей комплексной плоскости. Согласно теореме Лиувиля о том, что ограниченная функция, аналитическая во всей комплексной плоскости, есть константа, получим:

$$2z\Phi(z) + \frac{\pi}{2}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}z = \mathrm{const}$$

и так как в точке $z = 0$ левая часть обращается в ноль, то $\mathrm{const} = 0$, то есть $\Phi(z) = \frac{\pi}{4z}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}z$, теперь (17) приобретает вид:

$$\frac{1}{\pi}\left(\gamma_1\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\sqrt{y_1}}{\sqrt{y_1}}+\gamma_2\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\sqrt{y_2}}{\sqrt{y_2}}+\gamma_3\frac{\pi}{2}\right),$$

а уравнение (12) переписывается в следующем виде:

$$-\frac{\pi}{C}=\gamma_1\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\sqrt{y_1}}{\sqrt{y_1}}+\gamma_2\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\sqrt{y_2}}{\sqrt{y_2}}+\gamma_3\frac{\pi}{2}. \tag{19}$$

Это трансцендентное уравнение относительно P. Преобразуем уравнение (19) для более удобного использования

$$-\frac{\pi}{C}\cos\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{y_1}\right)=\gamma_1\frac{\sin\frac{\pi}{2}\sqrt{y_1}}{\sqrt{y_1}}+$$

$$+\cos\frac{\pi}{2}\sqrt{y_1}\left[\gamma_2\frac{\operatorname{th}\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{|y_2|}\right)}{\sqrt{|y_2|}}+\gamma_3\frac{\pi}{2}\right]. \tag{20}$$

Подставляя в него явные выражения для y_1 и y_2 — корней уравнения (15), коэффициенты A_1, A_2 и A_3 из (9) и (10), а также γ_1, γ_2, γ_3 из (16), получатся все точные значения для P_i.

В качестве примера определим частоты свободных колебаний металлического моста комбинированной системы «жесткая балка — гибкая арка» с ездой поверху при данных: $L=120$ *м*; $f=18$ *м*;

$E_a=E_0=2{,}1\cdot10^7$ *т/м²*; $F_a=0{,}03276$ *м²*; $F_б=0{,}13373$ *м²*; $J_0=0{,}04356$ *м⁴*; $H=402{,}53$ *т*.

Расчет по уравнению (20) произведен на ЭВМ ЕС на алгоритмическом языке «FORTRAN—IV», удобном для программирования и решения инженерных задач. Получены следующие низшие частоты вертикальных свободных колебаний для рассмотренного примера.

$P_1=7{,}500$ *сек*$^{-1}$; $P_2=10{,}5941$ *сек*$^{-1}$; $P_3=25{,}1087$ *сек*$^{-1}$; $P_4=49{,}5917$ *сек*$^{-1}$; $P_5=82{,}8341$ *сек*$^{-1}$; $P_6=123{,}8960$ *сек*$^{-1}$ и т. д.

Լ. Գ. ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ, Ա. Գ. ՌՈՒԲԻՆՈՎԻՉ

«ՃԿՈՒՆ ԿԱՄԱՐ—ԿՈՇՏ ՀԵԾԱՆ» ՀԱՄԱԿԱՐԳԻ ԱԶԱՏ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԸ

Ամփոփում

Հոդվածում դիտարկվում են համակցված «կոշտ հեծան—ճկուն կամար» համակարգի ազատ տատանումների հաճախությունները, երբ երթևեկությունը իրականացվում է վերին գոտիով: Տատանումների դիֆերենցիալ հավա-

սարման մեջ նկատի է առնված համակարգի դեֆորմացիան տատանման ժամանակ։ Առաջարկված է այդ հավասարման լուծումը համակարգի ազատ տատանումների բոլոր հաճախությունների որոշման համար։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Исаков П. Р.* Вибрация висячих и арочных ферм. МИСИ им. Куйбышева, сб. тр. № 4, 1940.
2. *Смирнов А. Ф.* Устойчивость и колебание сооружений. ГТЖИ, М., 1958.
3. *Коншенко С. И.* Свободные и вынужденные колебания гибкой арки с балкой жесткости. Тр. Днепропетровс. инст. железнодор. тр. Трансжелдориздат, вып. XXIII, 1953.
4. *Смирнов В. А.* Висячие мосты больших пролетов. М., 1975.
5. *Кунцов Г. Я.* О свободных колебаниях мостов комбинированных систем. Сб. «Вопросы динамики и динамической прочности» вып. II, Рига, АН Латв. ССР, 1954.