

МАШИНОСТРОЕНИЕ

М. А. ЕСАЯН, Г. С. МАРТИРОСЯН, А. В. ХЕЧМЯН, С. Г. ОГАНЕСЯН

О НЕКОТОРЫХ ОСОБЕННОСТЯХ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ  
 УСТОЙЧИВОСТИ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ФРЕЗЕРНЫХ  
 СТАНКОВ

Опыт производства и эксплуатации фрезерных станков показал, что виброхарактеристики, жесткость, геометрическая точность и другие параметры станков, взятые по множеству образцов одной модели, имеют, как правило, существенное рассеивание, связанное с кинематическими особенностями процесса, нестабильностью технологического процесса изготовления деталей и сборки. С этой точки зрения исследование виброустойчивости и путей стабилизации виброхарактеристик систем фрезерных станков приобретает важное практическое значение.

В статье исследуются три взаимообуславливающих аспекта динамики вертикально-фрезерных станков: условие устойчивости системы с учетом особенностей процесса фрезерования — количества одновременно работающих зубьев фрезы, влияние погрешностей изготовления конструктивных элементов шпиндельных узлов и рассеивания частоты автоколебаний на виброустойчивость.

1. На рис. 1 представлена схема процесса фрезерования, при котором сохраняется определенное отклонение системы под действием установившейся силы резания.

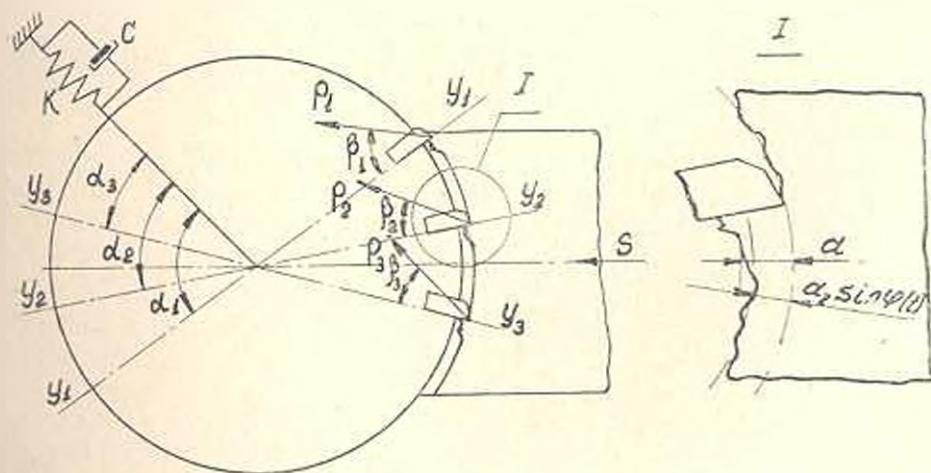


Рис. 1

Уравнение мгновенной толщины среза для всех одновременно режущих зубьев определяется как сумма толщин срезов

$$a(t) = \sum_{i=1}^n a_i(t) = \sum_{i=1}^n \left[ a_i \sin \varphi_i(t) - y_i(t) - \mu y_i(t-T) \right], \quad (1)$$

где  $\varphi_i(t) = \omega_1(t) + \varphi_{0i}$ ;  $T = \frac{1}{N\omega_1}$ ;  $\omega_1$  — угловая скорость шпинделя;

$\varphi_{0i}$  — начальная фаза, характеризующая начальное положение зуба фрезы;  $n$  — число одновременно режущих зубьев;  $t$  — время;  $\mu$  — коэффициент перекрытия.

В результате преобразования Лапласа уравнение (1) примет вид:

$$a(S) = \sum_{i=1}^n \left[ a_i e^{-S\tau_{0i}} \sin(\varphi_{0i} - S) - (1 - \mu e^{-ST}) y_i(S) \right]. \quad (2)$$

Связь между результирующей силой резания  $P(t)$  и мгновенной толщиной среза  $a(t)$  определяется по выражению [1]

$$P(t) = K_c a(t), \quad (3)$$

где  $K_c$  — статическая направленная жесткость резания.

Для всех одновременно режущих зубьев уравнение (3) имеет вид:

$$P(t) = \sum_{i=1}^n P_i(t) = \sum_{i=1}^n K_c a_i(t). \quad (4)$$

Применив преобразование Лапласа к обеим частям (4), получим

$$P(S) = L \left[ \sum_{i=1}^n P_i(t) \right] = \sum_{i=1}^n K_c a_i(S) = \sum_{i=1}^n P_i(S). \quad (5)$$

Сила резания  $P(S)$  вызывает деформацию упругой системы, что приводит к изменению относительного положения инструмента и заготовки, в связи с чем изменяются сечение среза и сила резания, а последняя приводит к изменению деформации упругой системы. При безвибрационном резании входная и выходная координаты принимают установившиеся значения.

В случае возникновения автоколебаний происходит изменение во времени входной координаты и поэтому существенное значение приобретает динамическая характеристика системы [2].

Упругую систему фрезерного станка представим моделью с сосредоточенными параметрами с одной степенью свободы (рис. 1). Тогда уравнение системы, учитывающее воздействие одновременно работающих зубьев, будет:

$$\sum_{i=1}^n P_i(t) \cos(\alpha_i - \beta_i) = \sum_{i=1}^n \left\{ m \frac{d^2}{dt^2} \left[ y_i(t) \right] + C \frac{d}{dt} \left[ y_i(t) \right] + k \frac{y_i(t)}{\cos \alpha_i} \right\}, \quad (6)$$

где  $m$  — эквивалентная масса системы;  $C$  — коэффициент затухания неустойчивой формы колебаний системы;  $k$  — постоянная упругости данной формы колебаний.

В результате преобразования Лапласа из (6) легко получить выражение динамической податливости в виде передаточной функции

$$\frac{\sum_{i=1}^n y_i(S)}{\sum_{i=1}^n P_i(S)} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{K_{mi}} k_{mi}(S), \quad (7)$$

где  $k_{mi}(S)$  — нормализованная динамическая податливость, равная

$$\frac{1}{\left(\frac{m}{K} S^2 + \frac{C}{K} S + 1\right)}, \quad a \frac{1}{K_{mi}} = \frac{1}{K} \cos(\alpha_i - \beta_i) \cos \alpha_i,$$

где  $K_{mi}$  — направления статическая жесткость системы.

Из уравнения (2), (5), (7) найдем передаточную функцию, связывающую заданную и фактическую толщину среза  $a_i e^{-S\tau_i} \sin(\tau_{oi} + S)$  и  $a(S)$

$$\frac{\sum_{i=1}^n a_i(S)}{\sum_{i=1}^n a_i e^{-S\tau_i} \sin(\tau_{oi} + S)} = \frac{\sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^{n-1} \left[ 1 + (1 - \mu e^{-S\tau_j}) \frac{K_c}{K_{mi}} K_{mi}(S) \right]}{\prod_{i=1}^n \left[ 1 + (1 - \mu e^{-S\tau}) \frac{K_c}{K_{mi}} K_{mi}(S) \right]}, \quad (8)$$

Согласно теореме Ляпунова линейная система устойчива, когда все корни характеристического уравнения имеют отрицательные действительные части. Если некоторые корни имеют действительные части, равные нулю, а остальные — отрицательные действительные части, то это условие представляет границу устойчивости и решения характеристического уравнения будут гармоническими. Из (8) характеристическое уравнение можно представить в следующем виде:

$$\prod_{i=1}^n \left[ 1 + (1 - \mu e^{-S\tau}) \frac{K_c}{K_{mi}} K_{mi}(S) \right] = 0. \quad (9)$$

Из уравнения (9) для случая обработки однозубой фрезой имеем

$$\frac{K_c}{K_m} K_{mi}(S) = \frac{1}{1 - \mu e^{-S\tau}}. \quad (9a)$$

Рассмотрим передаточную функцию

$$\frac{y(S)}{a(S)} = \frac{P(S) y(S)}{a(S) P(S)},$$

так как  $\frac{y(S)}{a(S)} = \frac{1}{K_m} K_{mi}(S)$ , что вытекает из (7) при  $n = 1$ , то

$$\frac{y(S)}{a(S)} \frac{K_c}{K_m} K_{\text{дин}}(S). \quad (96)$$

Правую часть уравнения (9а) обозначим через  $K_{\text{дин. ср.}}$

$$K_{\text{дин. ср.}} = \frac{1}{1 - \mu e^{-ST}}.$$

Из (9а) (96) следует, что

$$\frac{y(S)}{a(S)} = K_{\text{дин. ср.}}$$

Обозначим  $\frac{K_c}{K_m} K_{\text{дин}}(S)$  через  $K_{\text{дин. ср.}}$  и раскрывая (9), получим

$$\prod_{i=1}^n |1 + (1 - \mu e^{-ST}) K_{\text{дин. ср.}}| = |1 + (1 - \mu e^{-ST})(K_{\text{дин. ср.}} + K_{\text{дин. ср.}} + \dots + K_{\text{дин. ср.}}) + (1 - \mu e^{-ST})^2 (K_{\text{дин. ср.}} \cdot K_{\text{дин. ср.}} + K_{\text{дин. ср.}}^2 + \dots + K_{\text{дин. ср.}}^2) + \dots + (1 - \mu e^{-ST})^n K_{\text{дин. ср.}}^n| = 0.$$

Для всех членов многочлена (относительно  $1 - \mu e^{-ST}$ ) при  $\mu = 0$  граница устойчивости определяется точкой Найквиста (0; -1). Если же  $\mu$  отлично от нуля, то наименьшее значения  $|Re K_{\text{дин. ср.}}|$  определяется наибольшей степенью выражения  $(1 - \mu e^{-ST})$ . Определим действительную часть  $K_{\text{дин. ср.}}$

$$Re K_{\text{дин. ср.}} = Re \frac{-1}{(1 - \mu e^{-ST})^n} = -\frac{1}{2^n} + \frac{n(n-1)}{2^n \cdot 2!} \left( \frac{\sin \omega T}{1 - \cos \omega T} \right)^2 - \frac{1}{2^n} \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} \left( \frac{\sin \omega T}{1 - \cos \omega T} \right)^4 + \frac{1}{2^n} \frac{n(n-1) \dots (n-5)}{6!} \left( \frac{\sin \omega T}{1 - \cos \omega T} \right)^6 - \dots + (-1)^{2(n-1)} \left( \frac{\sin \omega T}{1 - \cos \omega T} \right)^n. \quad (10)$$

Рассматривая систему на границе устойчивости (система консервативная), можно не учитывать фазовые соотношения между динамическими изменениями силы резания и колебательными смещениями системы.

Из (10) видно, что  $Re K_{\text{дин. ср.}}$  зависит от  $\omega T$ , а границей устойчивости является  $[\max Re K_{\text{дин. ср.}}, 0]$ . Так как эта граница определяется при  $\omega T = \varphi = \pi$ , то  $\max Re K_{\text{дин. ср.}} = \lim_{\omega T \rightarrow \pi} Re K_{\text{дин. ср.}} = -\frac{1}{2^n}$ .

Таким образом, при числе одновременно работающих зубьев, равном

и, зона устойчивости ограничивается  $\left[-\frac{1}{2^n}; 0\right]$ , т. е. с прибавлением очередного зуба зона устойчивости уменьшается в 2 раза (рис. 2). Полученный результат согласуется с экспериментальными данными [3], установившими обратно-пропорциональную зависимость между числом одновременно работающих зубьев и зоной устойчивости при фрезеровании.

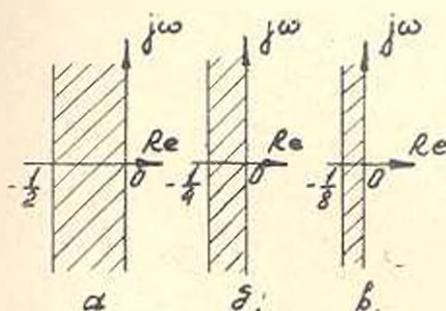


Рис. 2

2. Для определения влияния дефекта шпиндельного узла на границу устойчивости, рассмотрен дефект в виде овальности расточки отверстия под передний подшипник. При этом меняются его геометрия и радиальный зазор между кольцами, что приводит к изменению жесткости подшипника  $K = \frac{P}{l}$ , которая при указанном выше дефекте выразится отношением

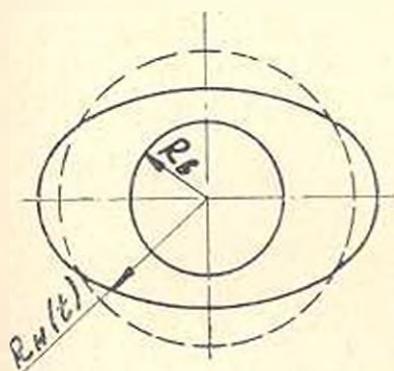


Рис. 3

$$K = \frac{P}{\Delta(t) + l}, \tag{11}$$

где  $P$  — сила;  $l$  — смещение в направлении силы  $P$ ;  $\Delta(t)$  — зазор, величина которого изменяется во времени по закону  $\Delta(t) = R_n(t) - R_b$ ;  $R_n(t)$  и  $R_b$  — соответственно, радиусы наружного и внутреннего жёлобов колес подшипника (рис. 3).

Для  $n$  одновременно режущих зубьев

$$K_{\text{лин. ср}} = \prod_{i=1}^n K_{\text{лин. ср}} = \prod_{i=1}^n \frac{K_c \cdot K_{\text{лин}}(S)}{K_{\text{ин}}^i} = \prod_{i=1}^n K_c \cdot K_{\text{лин}}(S) \frac{1}{K_{\text{ин}}^i}. \quad (12)$$

При условии линейности системы суммарная податливость равна сумме податливостей элементов

$$\frac{1}{K_{\text{ин}}^i} = \frac{1}{K_1^{(i)}} + \frac{1}{K_2^{(i)}} + \frac{1}{K_3^{(i)}} + \dots + \frac{1}{K_q^{(i)}}. \quad (13)$$

где  $q$  — число элементов системы.

При наличии дефекта в виде овальности отверстия под подшипник, величина податливости подшипника увеличится из-за увеличения деформации на  $\Delta(t)$  под действием силы  $P$

$$\frac{1}{K_i^{(i)}} = \frac{1}{P[\Delta(t_i) + I]}. \quad (14)$$

Для определения  $K_{\text{лин. ср}}$  при наличии дефекта подставим (13) и (14) в (12)

$$K_{\text{лин. ср. деф.}} = \prod_{i=1}^n K_c K_{\text{лин}}(S) \left[ \frac{1}{P[\Delta(t_i) + I]} + \frac{1}{K_1^{(i)}} + \frac{1}{K_2^{(i)}} + \dots + \frac{1}{K_q^{(i)}} \right] \quad (15)$$

и запишем выражение  $K_{\text{лин. ср}}$  при условии отсутствия дефекта

$$K_{\text{лин. ср}} = \prod_{i=1}^n K_c K_{\text{лин}}(S) \left[ \frac{1}{PI} + \frac{1}{K_1^{(i)}} + \frac{1}{K_2^{(i)}} + \dots + \frac{1}{K_q^{(i)}} \right]. \quad (16)$$

Корни на мнимой оси имеют форму  $S = j\omega$ . Подставляя  $S = j\omega$  в выражения (15) и (16), с учетом  $\Delta(t_i) > 0$ , легко прийти к выводу:

$$\max_{\omega} \operatorname{Re} K_{\text{лин. ср. деф.}}(j\omega) \geq \max_{\omega} \operatorname{Re} K_{\text{лин. ср.}}(j\omega).$$

Таким образом, дефект в виде овальности отверстия под передний подшипник шпиндельного узла приводит к еще большему ограничению устойчивости.

Данный вывод подтвердился также экспериментально. Для введения дефекта овальности отверстие под передний подшипник шпиндельного узла было расточено и установлено кольцо (рис. 1). С помощью винтов, деформируя установленное кольцо, вводилась овальность различных величин и определялись значения предельной стружки — параметра, характеризующего устойчивость системы. Данные эксперимента приведены в таблице.

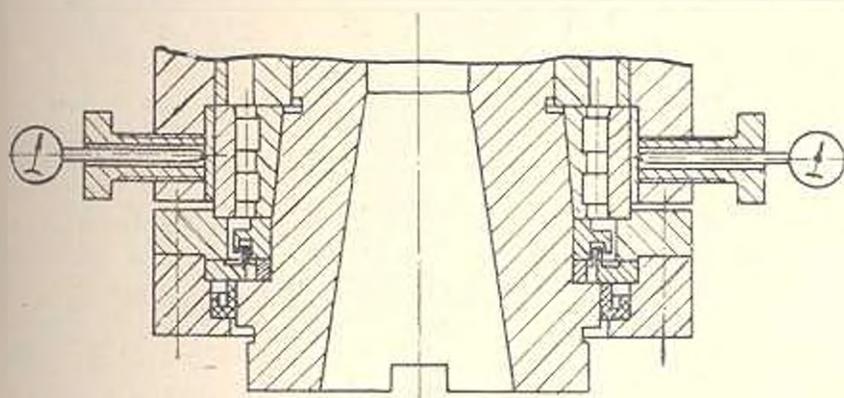


Рис. 1

Таблица

Овальность, мкм	0	6	10	14	20	30	40
$T_{огр. м.м.}$	4	4	4	3,9	3,2	3,2	3

Из табл. видно, что с увеличением овальности уменьшается значение предельной стружки. Повторными экспериментами, проведенными по группе выпускаемых станков одной модели, установлено, что резкое уменьшение величины предельной стружки происходит при значениях овальности, превышающих  $13 \div 14$  мкм.

3. Технологические погрешности изготовления приводят к рассеянию характеристик станков [4].

Рассмотрим влияние рассеяния частот автоколебаний  $\omega$  на область устойчивости по выражению (10). Оно показывает функциональную зависимость между частотой автоколебаний и действительной частью  $K_{дин. ср.}$ . Экспериментально установлено, что частота автоколебаний является случайной величиной, распределенной по закону Гаусса с параметрами  $m = 141$ ,  $\sigma = 8$ .

Из [5] известно, что непрерывную функцию можно аппроксимировать с любой точностью тригонометрическим многочленом, где степень точности зависит от порядка многочлена.

Так как правая часть выражения (10) является тригонометрическим многочленом порядка  $n$ , аргумент  $\omega$  которого имеет рассеяние, подчиняющееся закону Гаусса, то зона устойчивости  $Re K_{дин. ср.}$  также является величиной случайной, подчиняющейся тому же закону. Анализ данных показал, что предельная стружка также является величиной случайной, подчиняющейся нормальному закону с параметрами, равными  $m = 3,5$ ,  $\sigma = 0,47$ .

Из изложенного следует, что определение границы устойчивости вертикально-фрезерных станков по результатам анализа динамической системы представленного станка неприемлемо в условиях производ-

ства. Для объективной оценки указанного параметра необходимо обратиться к статистическим методам анализа.

### Выводы

1. Определено условие устойчивости вертикально-фрезерного станка с учетом числа одновременно работающих зубьев фрезы. Показано, что с увеличением их числа область устойчивости уменьшается.

2. Виброустойчивость системы зависит также от дефектов изготовления. При заданном числе одновременно работающих зубьев дефект в виде овальности расточки гильзы под передний подшипник существенно уменьшает область устойчивости станка.

3. Установлено, что распределение частоты автоколебаний, рассматриваемой как случайная величина, подчиняется нормальному закону и, как следствие этого, распределение границ устойчивости подчиняется тому же закону.

Чаренцаванский  
станкостроительный  
завод

Получено 28.11.1979

Մ. Ա. ԵՍԻԱՆ, Գ. Ս. ՄԱՍԻՍՅԱՆ, Ս. Վ. ԿԵԶԻՐՅԱՆ, Ս. Գ. ՀՈՎՀԱՆՅԱՆ

### ՀՐԵՋԵՐԱՅԻՆ ՀԱՍՏՈՑՆԵՐԻ ԿՆՆԱՄԵՐՈՎԱՆ ՀԱՄԱՎՈՐՄԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ԽՆԻՐԻ ԼՐԵՄԱՆ ՈՐՈՇ ՍՈՒՆՁՆԱՀԱՏՎՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՍԱՌԿ

Ս. Վ. Կ Ե Յ Ա Ն

Աշխատությունում նետադրույթով է փրկերաչին հաստացի կաշունությունը հարման ժամանակի Հայրենարդիկ է, որ կաշունության տիրույթը պատկերեն ընդունում է միաժամանակի աշխատող տրամանի րանակի և ինչ հանդույցի դիտարար առանդրակալի արտորին առանցման մակերևույթի ձգմանության շարժի մեծացման դադարից: Յույց է արված, որ կաշունության տիրույթը հանդիսանում է պատահական մեծություն և ենթարկվում Գաուսի օրենքին:

### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Мэрриг Г. Е. К вопросу об автоколебаниях металлорежущих станков «Пр. Амер. Общ. инж. мех. Конструирование и технология машиностроения», 1965, № 4.
2. Кидинов В. А. Динамика станков. М. «Машиностроение», 1967.
3. Тлуствы И. Автоколебания в металлорежущих станках. М., Машино, 1956.
4. Есаян М. А., Бабибджиян А. С., Петрозяниц Р. А. Динамическое качество эксплуатации станков Ереван «Айастан», 1970.
5. Натансон И. И. Теория функций вещественной переменной. М., Гостехиздат, 1957.