ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Տեխնիկական գիտութ. սերիա XXXII, № 2, 1979 Серия технических наук

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА

К. Г. АБРАМЯН, А. Г. КАРАПЕТЯН, Л. К. ЯГДЖЯН

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ПОКРЫТИЯ РАСПИСАНИЯ ДВИЖЕНИЯ САМОЛЕТОВ

В статье рассматривается частная задача на покрытие расписания движения самолетов. В качестве исходных данных задается множество рейсов; требуется определить минимальное количество самолетов, регулярно покрывающих заданное расписание.

Обозначим множество рейсов расписания через L:

$$L = \{l_1, l_2, \ldots, l_i, \ldots, l_n\},$$

где l_i — i-й рейс, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Каждый рейс l_i определяется двумя значениями: временем вылета t_i и прилета c_i. Под временем прилета принято время возвращения самолета, выполняющего i-ый рейс, плюс время τ, необходимое для подготовки данного самолета к следующему полету

$$L = \{[t_1, c_1], [t_2, c_2], \ldots, [t_i, c_i], \ldots, [t_n, c_n]\}.$$

Период, в течение которого повторяется расписание, обозначим через T, а минимальное количество самолетов, регулярно покрывающих данное расписание—через m.

Введем следующие условия [1]:

1. В каждый момент времени самолет не может выполнять более одного рейса.

2. Время вылета t_i всегда меньше времени прилета c_i.

3. Каждый рейс выполняется только одним самолетом.

Рассмотрим множество замкнутых интервалов, заданных на оси t действительных чисел

$$L = \{[t_i, c_i]\}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

где n — количество интервалов; t_i, c_i — начало и конец i-го интервала.

Составим новое счетное множество L^* интервалов, состоящее из всех интервалов множества L, сдвинутых по оси t на αT, где $\alpha = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \mp \infty$; T — длина сдвига или период повторения интервалов

$$L^* = \{[t_i + \alpha T, c_i + \alpha T]\}.$$

При этом потребуем выполнения условия

$$0 \leqslant t_i < T, \qquad i = 1, 2, \dots, n, \tag{1}$$

которое не сужает класс рассматриваемых L^*.

Определение 1. Сечением $S(t_0)$ множества L^* в точке t_0 называется количество интервалов из L^*, для которых выполняется условие

$$t < t_0 \leqslant c, \tag{2}$$

где $[t, c] \in L^*$; $t_0 \in (-\infty, \infty)$.

Интервалы, удовлетворяющие (2), называются входящими в сечение $S(t_0)$. Исходя из определения сечения, задача нахождения минимального количества самолетов, регулярно покрывающих расписание движения самолетов, сводится к нахождению максимального значения сечения $S(t)$ множества L^* на интервале $(-\infty, \infty)$, т. е.

$$m = \max_{-\infty < t < \infty} S(t).$$

Лемма 1. Для нахождения максимального сечения L^* достаточно найти это значение в интервале $[t_0, t_0 + T]$:

$$\max_{-\infty < t < \infty} S(t) = \max_{\substack{0 \leqslant t < T \\ t_0 \in (-\infty, \infty)}} S(t_0 + t). \tag{3}$$

Доказательство. Исходя из построения L^* и определения сечения $S(t)$ следует, что $S(t)$ периодическая функция с периодом T и поэтому справедливо (3).

Лемма 2. Справедливо следующее соотношение между сечениями $S(t_1)$ и $S(t_2)$, при $t_2 > t_1$:

$$S(t_2) = S(t_1) + H - K,$$

где H — количество элементов множества R_1 интервалов L^*, начала которых принадлежат $[t_1, t_2)$; K — количество элементов множества R_2 интервалов L^*, концы которых принадлежат $[t_1, t_2)$.

Доказательство. Пусть $[t, c]$ произвольный интервал из L^*. Возможны следующие случаи вхождения интервала $[t, c]$ в сечения $S(t_1)$ и $S(t_2)$ (рис. 1).

1. $[t, c]$ входит в сечения $S(t_1)$ и $S(t_2)$ (рис. 1а): $t_1 > t$; $c \geqslant t_2$; т. е. t и c не принадлежит $[t_1, t_2)$, откуда

$$[t, c] \notin R_1, R_2, \qquad H = 0, \quad K = 0.$$

Следовательно,

$$S(t_2) = S(t_1).$$

2. $[t, c]$ входит в сечение $S(t_1)$ и не входит в сечение $S(t_2)$ (рис. 1б): $t_1 > t$; $t_1 \leqslant c < t_2$, т. е. t не принадлежит $[t_1, t_2]$, а c принадлежит $[t_1, t_2)$, откуда

$$[t, c] \overline{\in} R_1, \qquad H = 0,$$

$$[t, c] \in R_2, \qquad K = 1.$$

Следовательно, $S(t_2) = S(t_1) - 1$.

3. $[t, c]$ входит в сечение $S(t_2)$ и не входит в сечение $S(t_1)$ (рис. 1в): $t_1 \leqslant t < t_2$; $c \geqslant t_2$.
Аналогично 2 имеем:

$$[t, c] \in R_1; \qquad H = 1;$$

$$[t, c] \overline{\in} R_2; \qquad K = 0.$$

Следовательно,

$$S(t_2) = S(t_1) + 1.$$

Для интервалов $[t, c]$, показанных на рис. 1, имеем:

$$S(t_2) = S(t_1) + 1 - 1 = S(t_1).$$

Рассмотрим возможные случаи расположения интервалов множества L^* не входящих в сечения $S(t_1)$ и $S(t_2)$ (рис. 2):

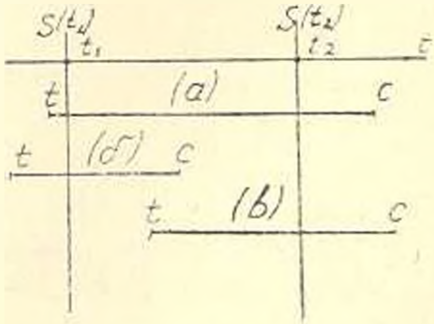

Рис. 1.

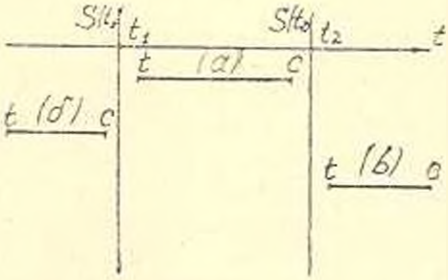

Рис. 2.

(а) $t \geqslant t_1$, $c < t_2$; (б) $t < t_1$, $c < t_1$; (в) $t \geqslant t_2$, $c > t_2$.

При условиях (а) имеем: $[t, c] \in R_1, R_2$, т. е. $H = 1$, $K = 1$, $S(t_2) = S(t_1)$; при условиях (б) — $[t, c] \overline{\in} R_1, R_2$, т. е. $H = 0$; $K = 0$, $S(t_2) = S(t_1)$, при условиях (в) — $[t, c] \overline{\in} R_1, R_2$, т. е. $H = 0$, $K = 0$, $S(t_2) = S(t_1)$.

Для интервалов $[t, c]$, показанных на рис. 2, имеем:

$$S(t_2) = S(t_1) + 1 - 1 = S(t_1).$$

Следствие.

$$S(t_1) = S(t_2),$$

если $[t_1, t_2)$ не содержит начал и концов интервалов из L^*.

Дадим однозначное представление c_i в виде:

$$c_i = \beta_i T + c_i', \tag{4}$$

где

$$0 \leqslant c_i' < T, \tag{5}$$

β_i — целое число.

Лемма 3. Сечение $S(0)$ множества L^* в нулевой точке равно:

$$S(0)=\sum_{i=1}^{n}\theta_i .$$

Доказательство. Рассмотрим произвольный интервал $[t_i, c_i]$ из L.

Множество интервалов из L^*, порожденное этим интервалом, будет:

$$\{[t_i+\alpha T,\ c_i+\alpha T]\}, \qquad \alpha=0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots \pm\infty .$$

Выделим из данного множества интервалы, входящие в $S(0)$. Тогда для этих интервалов выполняется условие (2)

$$t_i+\alpha T<0\leqslant c_i+\alpha T. \tag{6}$$

Из (6) и (1) получим

$$\alpha\leqslant -1. \tag{7}$$

а из (6), (4), (5) —

$$-\beta_i\leqslant\alpha. \tag{8}$$

Из (7) и (8) следует, что множество выделенных интервалов из L^*, удовлетворяющих условию (6), равно β_i.
Общее же количество интервалов из L^*, удовлетворяющих условию (6), равно $\sum\limits_{i=1}^{n}\theta_i$, что и требовалось доказать.

Пусть R_1 — множество интервалов из L^*, начало которых принадлежит $[0, T)$ и R_2 — множество интервалов из L^*, концы которых принадлежат $[0, T)$.

Лемма 4.

1. Начала интервалов из R_1 есть $\{t_i\}$, $i=1, 2, \ldots, n$.
2. Концы интервалов из R_2 есть $\{c_i'\}$, $i=1, 2, \ldots, n$.

Доказательство. 1. Рассмотрим множество интервалов, начала которых лежат в $[0, T)$, т. е.

$$0\leqslant t_i+\alpha T<T. \tag{9}$$

Из (9) и (1) получим $\alpha=0$, что и требовалось доказать.

2. Выделим из множества L^* интервалы, концы которых лежат в $[0, T)$, т. е.

$$0\leqslant c_i+\alpha T<T. \tag{10}$$

Из (10), (4), (5), получим $\alpha=-\beta_i$, что и требовалось доказать.

Лемма 1 позволяет сводить задачу нахождения максимального сечения L^* к нахождению максимального сечения L^* в интервале $[0, T)$. Из леммы 2 и 3 можно вычислить значение $S(t)$ в произвольной точке $t\in[0, T)$ по формуле:

$$S(t)=\sum_{i=1}^{s}\beta_i+H_t-K_t,$$

где H_t — количество элементов множества R_1 интервалов из L^*, начала которых принадлежат $[0, t)$; K — количество элементов множества R_2 интервалов из L^*, концы которых принадлежат $[0, t)$.

Пусть $\{S(t)\}$ — множество значений сечений $S(t)$ множества L^*, вычисленных в точках $\{t_i\}$ и $\{c_i\}$, найденных согласно лемме 4.

Теорема.

$$m=\max_{t\in\{t_i\},\{c_i\}}\{S(t)\}. \tag{11}$$

Доказательство. Исходя из следствия леммы 2 можно утверждать, что множество $\{S(t)\}$ является множеством всевозможных значений $S(t)$ и поэтому справедливо (11).

ЕрПИ им. К. Маркса

Поступило 1.IX.1978.

Կ. Հ. ԱԲՐԱՀԱՄՅԱՆ, Ա. Հ. ԿԱՐԱՊԵՏՅԱՆ, Լ. Կ. ՅԱՂՋՅԱՆ

ԻՆՔՆԱԹԻՌՆԵՐԻ ՇԱՐԺՄԱՆ ՉՎԱՑՈՒՑԱԿԻ ԿԱՏԱՐՄԱՆ ԽՆԴԻՐԸ

Ամփոփում

Հոդվածում քննարկվում է ինքնաթիռների շարժման չվացուցակի առանձնահատուկ խնդիրը։ Որպես մեկնակետ տրվում են մեծ թվով թռիչքներ։ Որոշվում է տվյալ չվացուցակի թռիչքները կանոնավոր կերպով կատարող ինքնաթիռների նվազագույն թիվը։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Конвей Р. В., Максвелл В. Л., Миллер Л. В.* Теория расписаний. М., «Наука», 1975.