ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Տեխնիկական գիտութ. սերիա XXXII, № 1, 1979 Серия технических наук

ИЗМЕРИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА

О. Н. ГАСПАРЯН, Г. Г. ЕГИАЗАРЯН

О ДИНАМИЧЕСКОЙ ТОЧНОСТИ МНОГОСВЯЗНЫХ СЛЕДЯЩИХ СИСТЕМ

Среди систем автоматического управления важный и широкий класс составляют многосвязные системы. К этому классу относятся электромеханические счетно-решающие устройства, системы углового сопровождения радиоантенн, пространственной ориентации и стабилизации летательных аппаратов и ряд других [1—4]. При этом наиболее часто встречаются системы, которые характеризуются жесткими взаимными связями между сепаратными (отдельными) каналами или связями, передаточные функции которых отличаются только коэффициентами передачи [4].

Указанным системам соответствует матричная структурная схема, приведенная на рис. 1, где $R = \{r_{ij}\}$, $M = \{m_{ij}\}$ — квадратные матрицы взаимных связей; $\mathrm{diag}\{W_i(p)\}$ — диагональная матрица передаточных функций сепаратных каналов: $\bar{\varphi}_{вх}(p)$, $\bar{\varphi}_{вых}(p)$, $\bar{\varepsilon}(p)$ — изображения по Лапласу векторов входа, выхода и ошибки системы, соответственно.

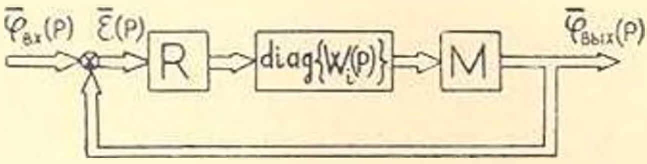

Рис. 1.

Впервые вопросы точности многосвязных систем были рассмотрены в работе [9]. В дальнейшем они получили обобщение в [1—3]. Однако в этих работах в выражении вектора ошибки системы отсутствует явная связь с параметрами сепаратных каналов и матрицами взаимных связей. Поэтому практическое использование результатов, приведенных в [1—3, 9], крайне затруднительно, а в некоторых случаях невозможно. Результаты, лишенные указанных недостатков для систем с одинаковым порядком астатизма в сепаратных каналах, получены в работе [5], где предложена методика определения матриц коэффициентов ошибок по аналогии с методикой Л. Г. Кинга для одномерных систем. Приведенные в [5] формулы просты и выражаются в явном виде через параметры системы, но для матриц высших коэффициентов ошибок являются приближенными.

В данной статье проводится строгий анализ точности трехканальной следящей системы (ТСС) с жесткими взаимными связями между сепаратными каналами, передаточные функции которых имеют произвольный вид.

Рассмотрим взаимосвязанную ТСС с порядком астатизма $r \geq 1$ в сепаратных каналах. Матричная структурная схема системы приведена на рис. 1. Передаточные функции сепаратных каналов $W_i(p)$ ($i = 1, 2, 3$) различны и имеют в общем случае вид

$$W_i(p) = \frac{\sum\limits_{k=0}^{m} a_k^i p^k}{\sum\limits_{k=1}^{n} b_k^i p^k}, \qquad m \leq n, \tag{1}$$

где в зависимости от порядка астатизма этих каналов соответствующие коэффициенты B_k^i равны нулю.

Матричная передаточная функция системы по ошибке равна [1]

$$\Phi_\varepsilon(p) = [J + M \operatorname{diag}\{W_i(p)\} R]^{-1}. \tag{2}$$

Согласно [2], [5] выражение (2) при малых p можно представить в виде

$$\Phi_\varepsilon(p) = \sum_{i=0}^{\infty} C_i p^i, \tag{3}$$

где C_i — матрицы коэффициентов ошибок ТСС по отношению к $\overline{\varphi}_{вх}(p)$.

С учетом (3) изображение вектора ошибки ТСС равно

$$\overline{\varepsilon}(p) = \Phi_\varepsilon(p)\,\overline{\varphi}_{вх}(p) = \left[\sum_{i=0}^{\infty} C_i p^i\right] \overline{\varphi}_{вх}(p). \tag{4}$$

Применяя к выражению (4) обратное преобразование Лапласа, получим оригинал

$$\overline{\varepsilon}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} C_i \frac{d^i \overline{\varphi}_{вх}(t)}{dt^i}. \tag{5}$$

Таким образом, вектор ошибки системы может быть определен, если известен вектор входного воздействия $\overline{\varphi}_{вх}(t)$, его производные и матрицы коэффициентов ошибок C_i. Матрицы C_i можно вычислить при помощи рекуррентных соотношений [5]

$$C_0 = \lim_{p\to 0} [\Phi_\varepsilon(p)], \tag{6}$$

$$C_\delta = \lim_{p\to 0} \frac{1}{p^\delta} \left[\Phi_\varepsilon(p) - \sum_{i=0}^{\delta-1} C_i p^i\right], \qquad \delta = 1, 2, 3, \ldots$$

Перейдем к определению матриц коэффициентов ошибок C_δ. Для этого преобразуем матричную структурную схему исходной системы (рис. 1) к эквивалентному виду (рис. 2).

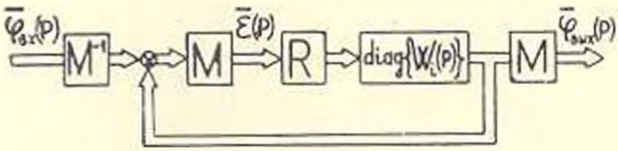

Рис. 2.

В этом случае матричная передаточная функция по ошибке равна

$$\Phi_\varepsilon(p) = M[J + \mathrm{diag}\{W_i(p)\}RM]^{-1}M^{-1}. \tag{7}$$

Представим выражение (7) в виде произведения двух матриц, одна из которых диагональная [1], [5]:

$$\Phi_\varepsilon(p) = MU^{-1}(p)\,\mathrm{diag}\left\{\frac{1}{1+m_{ii}r_{ii}W_i(p)}\right\}M^{-1}, \tag{8}$$

где матрица $U(p)$ равна $U(p) = [u_{ij}(p)]$.

Здесь

$$[u_{ij}(p)] = \begin{cases} \dfrac{1 + W_i(p)\sum\limits_{k=1}^{3} r_{ik}m_{kj}}{1 + m_{ii}r_{ii}W_i(p)}, & i = j, \\[2ex] \dfrac{W_i(p)\sum\limits_{k=1}^{3} r_{ik}m_{kj}}{1 + m_{ii}r_{ii}W_i(p)}, & i \neq j. \end{cases} \tag{9}$$

$$i, j = 1, 2, 3$$

Предел матрицы $U^{-1}(p)$ при $p \to 0$ существует и равен

$$U^{-1}(0) = M^{-1}R^{-1}\mathrm{diag}\{r_{ii}m_{ii}\}. \tag{10}$$

После подстановки (8) в (6) получим

$$C_0 = \lim_{p\to 0}\left[MU^{-1}(p)\,\mathrm{diag}\left\{\frac{1}{1+m_{ii}r_{ii}W_i(p)}\right\}M^{-1}\right],$$

$$C_\delta = \lim_{p\to 0}\frac{1}{p^\delta}\left[MU^{-1}(p)\,\mathrm{diag}\left\{\frac{1}{1+m_{ii}r_{ii}W_i(p)}\right\}M^{-1} - \sum_{i=0}^{\delta-1}C_ip^i\right], \tag{11}$$

$$\delta = 1, 2, 3, \ldots$$

Отметим, что представление матричной передаточной фучкции исходной системы (2) в виде

$$\Phi_1(p) = v^{-1}(p)\operatorname{diag}\left\{\frac{1}{1+m_{ii}r_{ii}W_i(p)}\right\}$$

невозможно, т. к. матрица $v^{-1}(p)$ не имеет конечного предела при $p \to 0$.

Очевидно, первые r матриц коэффициентов ошибок в выражении (11) равны нулю, где r — наименьший порядок астатизма сепаратных каналов стабилизации.

Определим первую отличную от нуля матрицу C_r

$$C_r = \lim_{p\to 0}\frac{1}{p^r}\left\{M\left[J+\operatorname{diag}\{W_i(p)\}RM\right]^{-1} - \sum_{i=0}^{r-1} C_i p^i\right\} =$$

$$= MU^{-1}(0)\operatorname{diag}\{C_{ri}\}M^{-1}, \tag{12}$$

где $\operatorname{diag}\{C_{ri}\}$ — диагональная матрица r-ых коэффициентов ошибок системы, полученной из исходной взаимосвязанной ТСС приравниванием нулю всех коэффициентов взаимных связей ($r_{ij} = m_{ij} = 0$ при $i \neq j$).

Аналогичным образом определим матрицу C_{r+1}

$$C_{r+1} = \lim_{p\to 0}\frac{1}{p^{r+1}}\left[MU^{-1}(p)\operatorname{diag}\left\{\frac{1}{1+m_{ii}r_{ii}W_i(p)}\right\}M^{-1} -\right.$$

$$\left. - MU^{-1}(0)\operatorname{diag}\{C_{ri}\}M^{-1}p^r\right] =$$

$$= M\left[U^{-1}(0)\operatorname{diag}\{C_{r+1i}\} + \left(\frac{dU^{-1}(p)}{dp}\right)_{p=0}\operatorname{diag}\{C_{ri}\}\right]M^{-1}. \tag{13}$$

Можно показать, что в общем случае матрица C_{r+k} имеет вид

$$C_{r+k} = M\left[U^{-1}(0)\operatorname{diag}\{C_{r+ki}\} + \right.$$

$$\left. + \sum_{\nu=1}^{k}\frac{1}{\nu!}\left(\frac{d^\nu U^{-1}(p)}{dp^\nu}\right)_{p=0}\operatorname{diag}\{C_{r+k-\nu i}\}\right]M^{-1}, \tag{14}$$

$$k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

где матрица $\operatorname{diag}\{C_{r+ki}\}$ определяется так же, как и $\operatorname{diag}\{C_{ri}\}$ в выражении (12).

Производные матрицы $U^{-1}(p)$ в точке $p=0$ определяются из (9) следующими рекуррентными формулами

$$\left(\frac{dU^{-1}(p)}{dp}\right)_{p=0} = M^{-1}R^{-1}\operatorname{diag}\left\{\frac{b_{1i}}{a_{0i}}\right\}M^{-1}R^{-1}(RM - \operatorname{diag} r_{ii}m_{ii}),$$

$$\left(\frac{d^{\delta}U^{-1}(p)}{dp^{\delta}}\right)_{p=0} = \delta!\, M^{-1}R^{-1}\,\mathrm{diag}\left\{\frac{1}{a_{0i}}\right\}\Bigg[\mathrm{diag}\{b_{\delta i}\}\, M^{-1}R^{-1}(RM - \mathrm{diag}\{r_{ii}m_{ii}\}) - \sum_{j=1}^{\delta-1}(\mathrm{diag}\{d_{\delta-j,i}\}\, RM + \mathrm{diag}\{b_{\delta-j,i}\})\,\frac{1}{j!}\left(\frac{d^{j}U^{-1}(p)}{dp^{j}}\right)_{p=0}\Bigg], \tag{15}$$

$$\delta = 2,\ 3,\ 4,\ \ldots$$

Таким образом, выражения (10), (12), (14) и (15) полностью определяют матрицы коэффициентов ошибок взаимосвязанной ТСС с различными передаточными функциями сепаратных каналов через параметры этих каналов и матрицы взаимных связей.

Очевидно, полученные выражения справедливы и для систем с произвольным числом сепаратных каналов ($i = 1, 2, \ldots, k$).

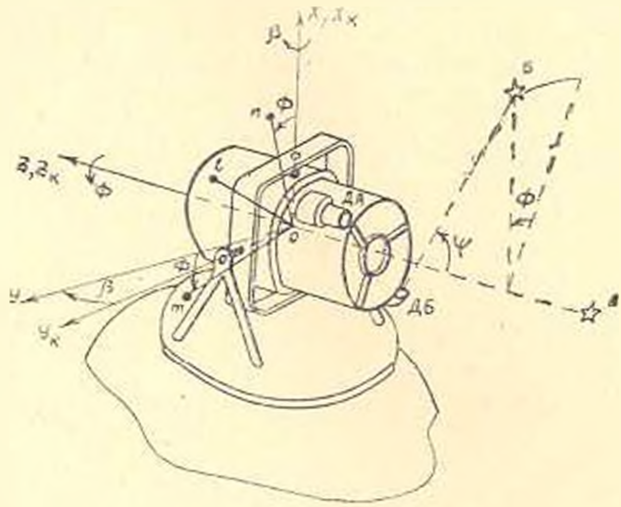

Рис. 3.

В качестве примера рассмотрим ТСС орбитальной астрофизической обсерватории «Орион-2» [10]. На рис. 3 приведена кинематическая схема телескопа обсерватории. Измерение его отклонений относительно инерциального пространства осуществляется с помощью двух опорных звезд А и Б, расположенных под углом $\psi = 65°$.

На звезду А, которая находится в центре исследуемой области, наводится двухкоординатный датчик ДА с полудисковым модулятором светового потока, а на звезду *Б* — однокоординатный датчик ДБ с анализаторной призмой [10]. Наведение ДБ за звезду *Б* производится разворотом телескопа относительно оптической оси *OZ* на угол захвата Ф. На рис. 3 через α и β обозначены углы наведения телескопа на исследуемую звезду A, а через Om, On и Ol — оси чувствительности датчиков.

Структурная схема ТСС обсерватории «Орион-2» показана на рис. 4.

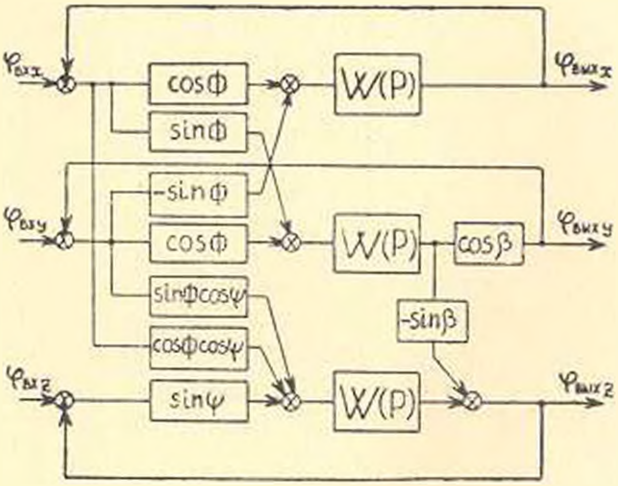

Рис. 4.

Здесь через $W(p)$ обозначены передаточные функции сепаратных каналов, а входные воздействия $\varphi_{вх_x}(t)$, $\varphi_{вх_y}(t)$, $\varphi_{вх_z}(t)$, действующие на ТСС телескопа, являются линейно изменяющимися функциями времени $\varphi_{вх_x}(t) = \varphi_{вх_y}(t) = \varphi_{вх_z}(t) = \Omega t$ $(\Omega = 0{,}01°/c)$ [7]. Сепаратные каналы стабилизации имеют первый порядок астатизма и добротности по скорости $K_\Omega = 120\,^1/_c$.

Матрицы взаимных связей R и M, обусловленные несовпадением осей чувствительности датчиков с осями стабилизации $OYXZ$ телескопа и неортогональностью осей карданова подвеса, равны

$$R = \begin{bmatrix} \cos\Phi & -\sin\Phi & 0 \\ \sin\Phi & \cos\Phi & 0 \\ \cos\Phi\cos\psi & \sin\Phi\cos\psi & \sin\psi \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & 0 \\ 0 & -\sin\beta & 1 \end{bmatrix}. \quad (16)$$

В соответствии с полученными выше результатами матрица C_0 тождественно равна нулю. Кроме того, учитывая, что производные вектора входного воздействия $\frac{d^i\bar{\varphi}_{вх}(t)}{dt^i}$ при $i \geqslant 2$ также равны нулю, вектор установившейся скоростной ошибки можно записать в виде

$$\bar{\varepsilon} = C_1 \frac{d\bar{\varphi}_{вх}(t)}{dt} = \frac{1}{K_\Omega} R^{-1} M^{-1} \frac{d\bar{\varphi}_{вх}(t)}{dt}. \quad (17)$$

где

$$R^{-1}=\begin{bmatrix} \cos\Phi & \sin\Phi & 0 \\ -\sin\Phi & \cos\Phi & 0 \\ \dfrac{\sin^2\Phi-\cos^2\Phi}{\operatorname{tg}\psi} & \dfrac{2\sin\Phi\cos\Phi}{\operatorname{tg}\psi} & \dfrac{1}{\sin\psi} \end{bmatrix},$$

$$M^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\cos\beta} & 0 \\ 0 & \operatorname{tg}\beta & 1 \end{bmatrix}. \tag{18}$$

Из развернутой структурной схемы (рис. 4) следует, что движения телескопа относительно поперечных осей X и Y являются возмущениями для канала стабилизации Z, причем, обратное влияние отсутствует. Это позволяет представить вектор $\bar{\varepsilon}_1$ ошибки поперечных каналов X, Z на основании (18) в виде

$$\bar{\varepsilon}_1=\frac{1}{K_\Omega}R_1^{-1}M_1^{-1}\frac{d\bar{\varphi}_{\text{вх}_1}(t)}{dt}, \tag{19}$$

где (2×2) — матрицы R_1^{-1} и M_1^{-1} получаются из (18) вычеркиванием последних строк и столбцов, а векторы $\bar{\varepsilon}_1$ и $\bar{\varphi}_{\text{вх}_1}(t)$ равны

$$\bar{\varepsilon}_1=[\varepsilon_x,\ \varepsilon_y],\qquad \bar{\varphi}_{\text{вх}_1}(t)=[\varphi_{\text{вх}_x}(t),\ \varphi_{\text{вх}_y}(t)].$$

Матрица R_1^{-1} в (19) является матрицей ортогонального преобразования [6] и сохраняет при умножении на векторы их модули.

Поэтому, переходя в (19) к модулям, получим

$$|\bar{\varepsilon}_1|=\frac{1}{K_\Omega}\left|R_1^{-1}M_1^{-1}\frac{d\bar{\varphi}_{\text{вх}_1}(t)}{dt}\right|=\frac{1}{K_\Omega}\left|M_1^{-1}\frac{d\bar{\varphi}_{\text{вх}_1}(t)}{dt}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{K_\Omega}\|M_1^{-1}\|\left|\frac{d\bar{\varphi}_{\text{вх}_1}(t)}{dt}\right|=\frac{\Omega\sqrt{2}}{K_\Omega}\sec\beta, \tag{20}$$

где через $\|M_1^{-1}\|=\sec\beta$ обозначена спектральная норма матрицы M_1^{-1} [8].

Полученное выражение (20) позволяет сделать вывод, что модуль вектора ошибки поперечных каналов X и Y не зависит от угла захвата Φ опорной звезды $Б$, а зависимость от угла β наведения телескопа на исследуемую звезду $А$ определяется функцией $\sec\beta$.

Подставив в (20) численные значения $\Omega=0{,}01^\circ/c=36''/c$, $K_\Omega=120^1/c$, $\beta=15^\circ$, получим $|\bar{\varepsilon}_1|\leqslant 0{,}44''$.

Рассмотрим канал стабилизации Z. Если обозначить третью строку матрицы R^{-1} (18) через $\bar{r}$, то для ошибки ε_z можно записать

$$|\varepsilon_z| = \frac{1}{K_z}\left|\left\langle \bar{r},\ M^{-1}\frac{d\bar{\varphi}_{\text{вх}}(t)}{dt}\right\rangle\right| \leqslant \frac{1}{K_z}|\bar{r}|\cdot|M^{-1}|\cdot\left|\frac{d\bar{\varphi}_{\text{вх}}(t)}{dt}\right| =$$

$$= \frac{\Omega\sqrt{3}}{K_z}\left(\frac{\sqrt{1+\cos^2\psi}}{\sin\psi}\right)\left(\frac{\sqrt{1+|\sin\beta|}}{\cos\beta}\right). \tag{21}$$

где $\langle\ ,\ \rangle$ — символ скалярного произведения, $|M^{-1}| = \dfrac{\sqrt{1+|\sin\beta|}}{\cos\beta}$ — спектральная норма матрицы M^{-1}, а $|\bar{r}| = \dfrac{\sqrt{1+\cos^2\psi}}{\sin\psi}$ — модуль вектора $\bar{r}$.

В выражении (21) использовано известное неравенство Коши—Шварца [8].

Как видно из (21), ошибка канала Z также не зависит от угла Φ. Подставив в (21) численные значения, найдем $\varepsilon_z \leqslant 0.665''$.

Таким образом, применение полученных выражений в сочетании с аппаратом функционального анализа позволило произвести анализ точности и выявить основные кинематические особенности ТСС обсерватории «Орион-2».

Поступило 20.VII.1978

Օ. Ն. ԳԱՍՊԱՐՅԱՆ, Դ. Գ. ԵՂԻԱԶԱՐՅԱՆ

ԲԱԶՄԱԿԱՊ ՀԵՏԵՎՈՂ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐԻ ԴԻՆԱՄԻԿ ՃՇԳՐՏՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Դիտվում է երեքկանալային հետևող համակարգ առանձին կանալներում տարբեր փոխանցման ֆունկցիաներով և կոշտ փոխադարձ կապերով։ Հետազոտվում է փոխադարձ կապերի ազդեցությունը համակարգի դինամիկ ճշգրտության վրա։

Տարածելով Լ. Գ. Քինգի մեթոդիկան բազմակապ համակարգերի վրա, ստացված են սխալների գործակիցների մատրիցաները, որոնք բացահայտ տեսքով արտահայտված են համակարգի պարամետրերի և փոխադարձ կապերի մատրիցաների միջոցով։

Որպես օրինակ բերվում է «Օրիոն—2» ուղեծրային աստղադիտարանի եռառանցք հետևող համակարգի դինամիկ ճշգրտության անալիզը։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Морозовский В. Т.* Многосвязные системы автоматического регулирования. М., «Энергия», 1970.
2. *Баранчук Е. И.* Взаимосвязанные и многоконтурные регулируемые системы. Л., «Энергия», 1968.
3. *Мееров М. В.* Системы многосвязного регулирования. М., «Наука», 1965.
4. *Соболев О. С.* Однотипные связанные системы регулирования. М., «Энергия», 1973.
5. *Гаспарян О. Н.* Анализ точности взаимосвязанных систем регулирования. «Промышленность Армении», 1974, № 9.
6. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М., «Наука», 1966.
7. *Лисович И. М.* и др. К вопросу оценки области применения газореактивных систем угловой стабилизации космических аппаратов. Сб. «Управление в пространстве», т. 1, М., «Наука», 1973.
8. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М., «Наука», 1972.
9. *Golomb M., Usdin E. A.* A theory of multidimensional servo system. J. Franklin. Ins., № 1, 1952.
10. *Gurzadyan G. A.* et all. Space astrophysical observatory „Orion-2". "Astrophis. Space Sci", 46, 1976.