

НАУЧНЫЕ ЗАМЕТКИ

Р. А. АЛАВЕРДЯН

ПОСТРОЕНИЕ ОБЩИХ КАСАТЕЛЬНЫХ ПРЯМЫХ К ПАРАБОЛЕ И ОКРУЖНОСТИ

§ 1. Когда центр окружности находится вне параболы, на оси симметрии

В поставленной задаче можно провести две внешние и две внутренние общие касательные. С этой целью строим наклонный (парабола как основание) и две прямые (окружность как основание) круговые конусы так, чтобы они были описаны вокруг одного и того же

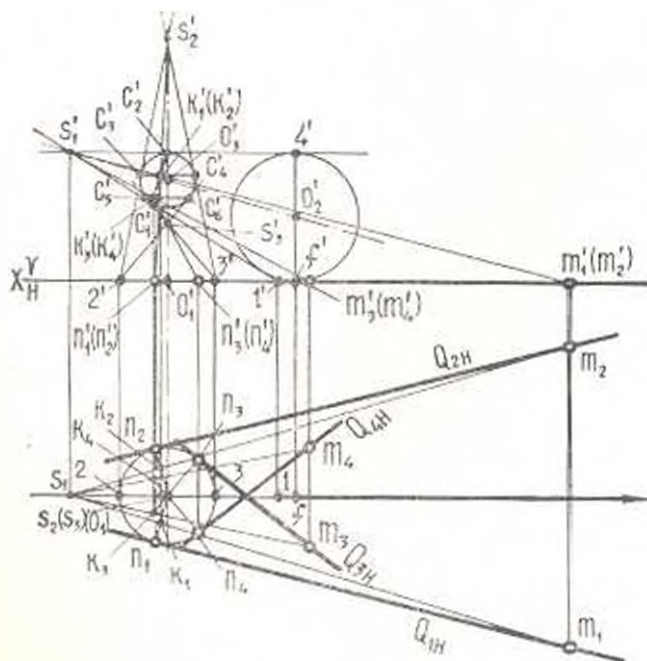


Рис. 1.

шара, центр которого расположен в точке пересечения осей построенных конусов.

Далее проводим две общие касательные плоскости Q_1 и Q_2 к поверхностям наклонного и одного прямого конусов, а также Q_3 и Q_4 — к поверхностям наклонного и второго прямого конусов. Искомые

касательные (внешние и внутренние) будут получены, как линии пересечения плоскостей Q_1, Q_2, Q_3 и Q_4 с плоскостью заданных кривых (ff).

Решение на эюре. Парабола задана вершиной 1 и фокусом f . Окружность $R < O_1$ задана центром в точке O_1 , вне параболы, на оси симметрии (рис. 1). Принимая заданные кривые как горизонтальные проекции, строим фронтальные проекции $1'f'$ параболы и $2'o'_13'$ окружности. Фронтальные проекции $1's'_14'$ наклонного и $2's'_23'$ — $2's'_33'$ прямых конусов строятся подобно [1]. Из построения видно, что фронтальные проекции построенных конусов касаются окружности с

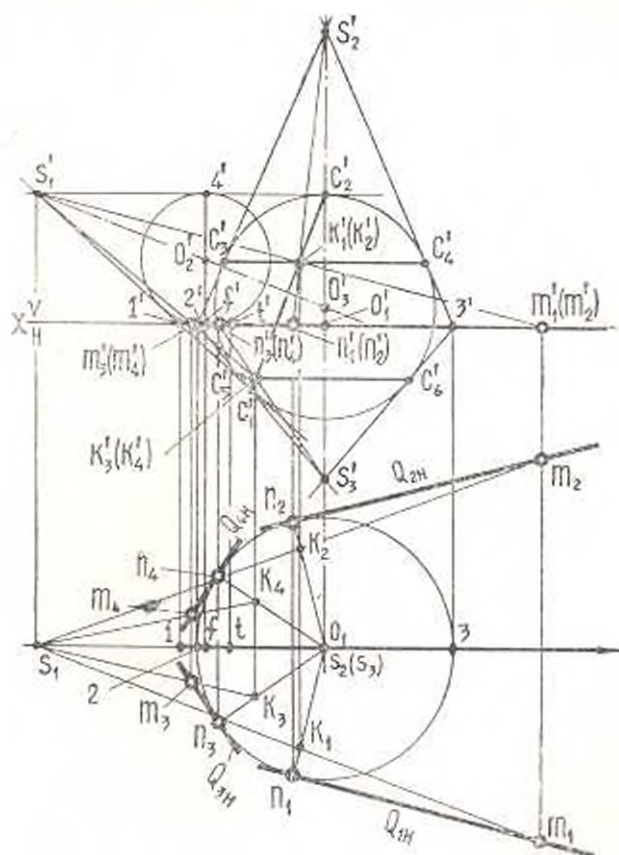


Рис. 2.

центром O_3 (являющейся фронтальной проекцией вспомогательного шара) в точках c'_1, c'_2, c'_3, c'_4 и c'_5, c'_6 . Линии c'_1, c'_2, c'_3, c'_4 и c'_5, c'_6 являются фронтальными проекциями окружностей касания конусов к шару. При этом окружности касания прямых конусов к шару пересекаются с окружностью касания наклонного конуса к шару в точках $K_2(k_2, k'_2)$ и $K_3(k_3, k'_3), K_4(k_4, k'_4)$.

Соединяя точки K_1 и K_2 с вершинами $S_1(s_1, s'_1)$, $S_2(s_2, s'_2)$, а точки K_3, K_4 —с вершинами $S_1(s_1, s'_1)$, $S_2(s_2, s'_2)$, получим четыре пары пересекающихся образующих $[S_1K_1(s_1k_1, s'_1k'_1), S_2K_1(s_2k_1, s'_2k'_1)]$ и $[S_1K_2(s_1k_2, s'_1k'_2), S_2K_2(s_2k_2, s'_2k'_2)]$ и $[S_1K_3(s_1k_3, s'_1k'_3), S_2K_3(s_2k_3, s'_2k'_3)]$ и $[S_1K_4(s_1k_4, s'_1k'_4), S_2K_4(s_2k_4, s'_2k'_4)]$, которые определяют две общие касательные плоскости Q_1, Q_2 к поверхностям конусов с вершинами S_1, S_2 и две плоскости Q_3, Q_4 —с вершинами S_1, S_2 . Затем находим горизонтальные следы $M_1(m_1, m'_1), N_1(n_1, n'_1), M_2(m_2, m'_2), N_2(n_2, n'_2)$ и $M_3(m_3, m'_3), N_3(n_3, n'_3), M_4(m_4, m'_4), N_4(n_4, n'_4)$ указанных образующих. Если соединить следы соответственных пересекающихся образующих,

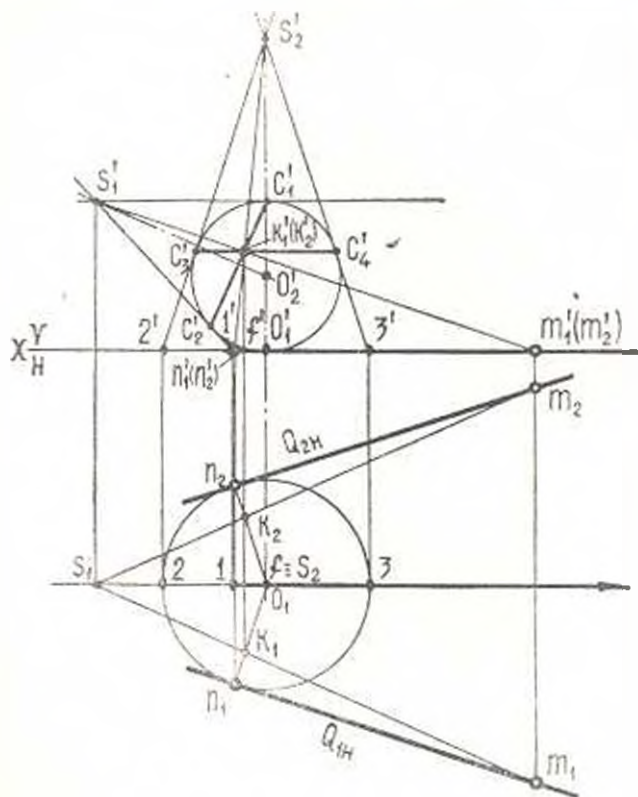


Рис. 3.

получим горизонтальные следы $Q_{1н}, Q_{2н}$ (внешние) и $Q_{3н}, Q_{4н}$ (внутренние искомые касательные).

При значении $R > 0,1$ существуют две общие касательные, при $R = 0,1$ — три общие касательные, а когда $R = 0$ — две касательные.

§ 2. Когда центр окружности находится внутри параболы, на оси симметрии, правее фокуса f (рис. 2)

Пространственное объяснение данной задачи, а также решение на эллире аналогичны § 1. В этом случае существуют четыре общие

касательные. при $O_1 l > R$ — нормали параболы (проходящей через центр O_1 данной окружности).

Полученные горизонтальные следы Q_{1H} , Q_{2H} , Q_{3H} и Q_{4H} являются искомыми касательными.

1°. Когда центр окружности находится правее центра кривизны (T):

а) ($R = O_1 l$) $\rightarrow$ существуют три общие касательные;

б) ($R < O_1 l$) $\rightarrow$ — две касательные;

в) ($R = \text{нормали параболы}$) $\rightarrow$ две касательные;

г) ($R < \text{нормали параболы}$) $\rightarrow$ окружность находится внутри параболы, следовательно, нет общих касательных.

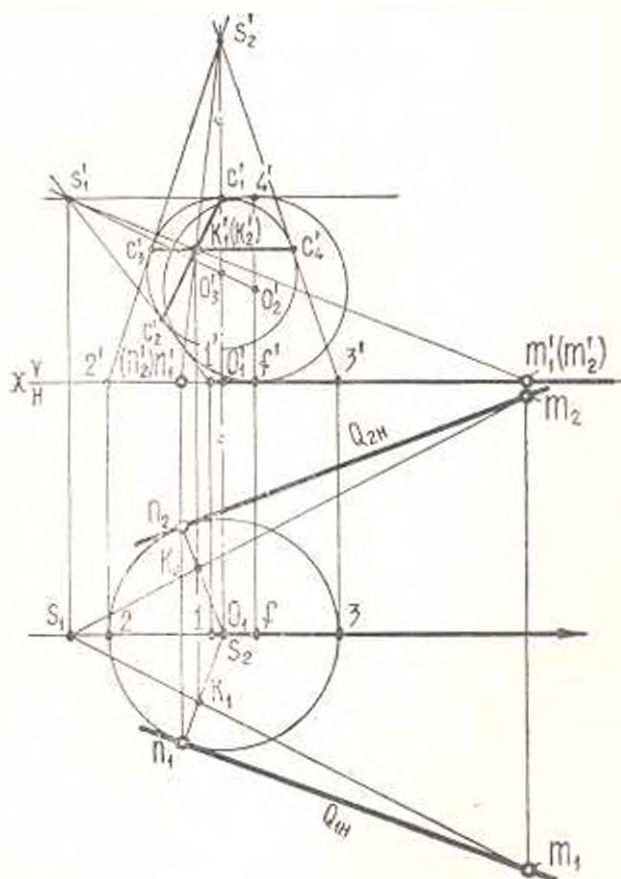


Рис. 4.

2°. Когда центр окружности совпадает с центром кривизны (T):

а) ($R > O_1 l$) $\rightarrow$ — две касательные;

б) ($R = O_1 l$) $\rightarrow$ — одна касательная;

в) ($R < O_1 l$) $\rightarrow$ нет общих касательных.

§ 3. Когда центр окружности совпадает с фокусом параболы (рис. 3)

В данной задаче, когда радиус заданной окружности $R > f$, существуют две общие касательные. Задача решается аналогично §§ 1, 2. Горизонтальные следы Q_{1n} и Q_{2n} будут искомыми касательными.

При $R = f$ существует одна касательная. При $R < f$ окружность находится внутри параболы, следовательно, нет общих касательных.

§ 4. Когда центр окружности находится между фокусом и вершиной параболы (рис. 4)

В данной задаче все построения аналогичны §§ 1, 2. Горизонтальные следы Q_{1n} и Q_{2n} будут искомыми касательными при $R > 0,1$.

При $R = 0,1$ существует одна касательная, а при $R < 0,1$ окружность находится внутри параболы, следовательно, задача не имеет решения.

Решение задачи аналитическим методом. Пусть в пространственной декартовой системе координат заданы парабола и окружность соответствующими уравнениями:

$$y^2 = 2Px, \quad Z = 0; \quad (1)$$

$$(x - l)^2 + y^2 = R^2, \quad Z = 0. \quad (2)$$

Построим сферу радиуса $|h|$ ($|h| = P$, $|h| > 0$), которая касается плоскости XOY в точке $F\left(\frac{P}{2}, 0, 0\right)$, т. е. в фокусе параболы (1). Если считать, что $h > 0$, $P > 0$, уравнение сферы будет

$$\left(x - \frac{P}{2}\right)^2 + y^2 + (Z - h)^2 = h^2. \quad (3)$$

Построим конус, описанный к сфере (3), с направляющей линией параболы (1). Его уравнение имеет вид:

$$Z_1^2 y^2 - 2Px_1(Z - Z_1)^2 + 2PZ_1(x - x_1)(Z - Z_1) = 0, \quad (4)$$

где

$$x_1 = \frac{2}{P} \left(\frac{P^2}{4} - h^2 \right); \quad Z = 2h. \quad (5)$$

Точка $s_1(x_1, 0, z_1)$ является вершиной конуса (4).

Построим сферу, касающуюся к конусу (4) с центром в точке $O_3(l, 0, Z_0)$:

$$(x - l)^2 + y^2 + (Z - Z_0)^2 = \zeta^2, \quad (6)$$

где

$$Z_0 = \frac{4h^3 + P^2 + 2lP}{4}; \quad \zeta = \frac{(2lP + 4h^2 - P^2)}{4h}. \quad (7)$$

Теперь построим два прямых конуса с направляющей линией окружности (2) и описанных вокруг сферы (6). Уравнение конусов будет:

$$Z_i^2(x-l)^2 + Z_i^2 y^2 - R^2(Z - Z_i)^2 = 0, \quad (i = 2, 3), \quad (8)$$

где

$$Z_2 = \frac{R(Z_0 l + \delta R)}{R l - \delta Z_0}; \quad Z_3 = \frac{R(Z_0 l - \delta R)}{R l + \delta Z_0}; \quad \delta = (R^2 + Z_0^2 - l^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (9)$$

В общем случае, конус (4) с конусами (8) имеет четыре общие касательные плоскости, уравнения которых имеют вид:

$$Z_2 T_1(x-l) + Z_2 \sqrt{1-T_1^2} y + RZ - RZ_2 = 0; \quad (10)$$

$$Z_2 T_1(x-l) + Z_2 \sqrt{1-T_1^2} y - RZ + RZ_2 = 0; \quad (11)$$

$$-Z_3 T_2(x-l) + Z_3 \sqrt{1-T_2^2} y + RZ - RZ_3 = 0; \quad (12)$$

$$Z_3 T_2(x-l) + Z_3 \sqrt{1-T_2^2} y - RZ + RZ_3 = 0, \quad (13)$$

где

$$T_1 = (2l - P)^{-1} [R + (R^2 + P^2 - 2Pl)^{\frac{1}{2}}]; \quad (14)$$

$$T_2 = (2l - P)^{-1} [R - (R^2 + P^2 - 2Pl)^{\frac{1}{2}}]. \quad (15)$$

Уравнения линий пересечения плоскостей (10), (11), (12), (13) с плоскостью XOY имеют вид:

$$-T_1(x-l) + \sqrt{1-T_1^2} y - R = 0, \quad Z=0; \quad (16)$$

$$T_1(x-l) + \sqrt{1-T_1^2} y + R = 0, \quad Z=0; \quad (17)$$

$$T_2(x-l) + \sqrt{1-T_2^2} y - R = 0, \quad Z=0; \quad (18)$$

$$T_2(x-l) + \sqrt{1-T_2^2} y + R = 0, \quad Z=0. \quad (19)$$

Очевидно, что прямые (16), (17), (18), (19) являются общими касательными к параболе (1) и окружности (2). Теперь рассмотрим частные случаи.

§ 1. Когда центр окружности находится вне параболы, на оси симметрии ($l = -|l| \leq 0$):

а) $(R < |l|) \rightarrow (T_1^2 < 1, T_2^2 < 1) \rightarrow$ существуют прямые (16), (17), (18), (19);

б) $(R = |l|) \rightarrow (T_1^2 < 1, T_2^2 < 1) \rightarrow x = 0, Z = 0$ и существуют (18), (19);

- в) $(R > |l|) \rightarrow (T_1^2 > 1, T_2^2 < 1)$ — существуют (18), (19);
 г) $(R > 0 = l) \rightarrow (T_1^2 > 1, T_2^2 < 1)$ — существуют (18), (19).

§ 2. Когда центр окружности находится внутри параболы, на оси симметрии, правее фокуса $\left(\frac{P}{2} < l < +\infty\right)$.

Здесь рассмотрим три случая.

1°. $\frac{P}{2} < l < P$;

а) $[R < \sqrt{P(2l - P)}] \rightarrow (T_1 \text{ и } T_2 \text{ комплекснозначные}) \rightarrow$ нет общих касательных;

б) $[R = \sqrt{P(2l - P)}] \rightarrow (T_1 = T_2 = \sqrt{\frac{P}{2l - P}} > 1) \rightarrow$ то же;

в) $[\sqrt{P(2l - P)} < R < l] \rightarrow (T_1^2 > 1, T_2^2 > 1) \rightarrow$ то же;

г) $(R = l) \rightarrow (T_1^2 > 1, T_2 = 1) \rightarrow x = 0, Z = 0$;

д) $(R > l) \rightarrow (T_1^2 > 1, T_2^2 < 1)$ — существуют (18), (19).

2°. $l = P$;

а) $(R < P) \rightarrow (T_1 \text{ и } T_2 \text{ комплекснозначные}) \rightarrow$ нет общих касательных;

б) $(R = P) \rightarrow (T_1 = T_2 = 1) \rightarrow x = 0, Z = 0$;

в) $(R > P) \rightarrow (T_1^2 > 1, T_2^2 < 1)$ — существует (18), (19).

3°. $P < l < +\infty$;

а) $[R < \sqrt{P(2l - P)}]$, т. е. радиус окружности (2) меньше длины нормали, проходящей через точку $(l, 0, 0)$. В этом случае T_1 и T_2 комплекснозначные и, следовательно, нет общих касательных;

б) $[R = \sqrt{P(2l - P)}] \rightarrow (T_1 = T_2 = \sqrt{\frac{P}{2l - P}} < 1) \rightarrow$ существуют две общие касательные;

в) $[\sqrt{P(2l - P)} < R < l] \rightarrow (T_1^2 < 1, T_2^2 < 1)$ — существуют (16), (17), (18), (19);

г) $(R = l) \rightarrow (T_1 = 1, T_2^2 < 1) \rightarrow x = 0, Z = 0$;

д) $(R > l) \rightarrow (T_1^2 > 1, T_2^2 < 1) \rightarrow$ существуют (18), (19).

§ 3. Когда центр окружности совпадает с фокусом параболы $\left(l = \frac{p}{2}\right)$.

В этом случае имеем [ср. (7), (9)]:

$$Z_0 = h; \quad \lambda = h; \quad \rho = R; \quad Z_2 = 2R^2h(R^2 - h^2)^{-1}; \quad Z_3 = 0.$$

Здесь сферы (3) и (6) совпадают, поэтому один из конусов (8) ($i = 3$) исчезает. Уравнения общих касательных плоскостей конусов (4) и (8) (при $i = 2$) имеют вид:

$$-Z_2Px + 2Z_2m(y - m) + 2R^2Z = 0; \quad (20)$$

$$Z_2Px + 2Z_2m(y - m) - 2R^2Z = 0. \quad (21)$$

где

$$m = \left(R^2 - \frac{p^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (22)$$

Линии пересечения плоскостей (20), (21) с плоскостью XOY будут:

$$-Px + 2m(y - m) = 0, \quad Z = 0; \quad (23)$$

$$Px + 2m(y - m) = 0, \quad Z = 0; \quad (24)$$

а) $\left(R < \frac{p}{2}\right) \rightarrow (m - \text{мнимая}) \rightarrow$ нет общих касательных;

б) $\left(R = \frac{p}{2}\right) \rightarrow (m = 0) \rightarrow x = 0, \quad Z = 0;$

в) $\left(R > \frac{p}{2}\right) \rightarrow (m - \text{действительная}) \rightarrow$ существуют (23), (24).

§ 4. Когда центр окружности находится между фокусом и вершиной параболы $\left(0 < l < \frac{p}{2}\right)$.

а) $(R < l) \rightarrow (T_1^2 > 1, T_2^2 > 1) \rightarrow$ нет общих касательных;

б) $(R = l) \rightarrow (T_1^2 > 1, T_2^2 = 1) \rightarrow x = 0, \quad Z = 0;$

в) $(R > l) \rightarrow (T_1^2 > 1, T_2^2 < 1) \rightarrow$ существуют (18), (19).

ЕрПН им. К. Маркса

Н. А. АЦЕЦЬЯНИ

Поступило 16.VI.1977.

ՊԱՐԱԲՈՒԼԻՆ ԵՎ ՇՐՋԱՆԱԿՈՒՆ ԲԵԿԷՄԱՆՈՒՐ ՇՈՇԱՓՈՂ
ՈՐՈՇՈՒՄՆԵՐԻ ԿԱՌՈՒՑՈՒՄԸ

Ա Վ Փ Ո Ւ Ն Ո Վ

Հորիզոնական քննարկում է երկու երկրորդ կարգի կորերին ընդհանուր չափող ուղիղների կառուցման հարցը, որը ունի ինչպես զործնական, այնպես

էլ տեսական նշանակություն: Պարարուի և շրջանագծի ընդհանուր շոշափողների էաոուցման համար օգտվում ենք պծադրական երկրաչափության ապարատից:

Ամբողջ կառուցումները հիմնավորված են տեսականորեն, որը և հնարալորություն է ապիա լուծված խնդիրները կիրառել խնրնաթիռաշինության, նավաշինության և մերենաշինության այլ բնագավառներում:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Алавердян Р. А., Шахбазян К. Х. Построение касательных прямых к кривым второго порядка // Известия АН Арм. ССР (серия ТН), т. XXX, № 2, 1977.