ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Տեխնիկական գիտութ. սերիա XXXI, № 2, 1978 Серия технических наук

НАУЧНЫЕ ЗАМЕТКИ

Д. С. МЕЛКОНЯН, А. А. ГАЗАРЯН

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ МАШИННЫХ АЛГОРИТМОВ СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА ДАННЫХ

Алгоритмы быстрого преобразования Фурье (БПФ), реализующие эффективные методы машинного расчета интегральных преобразований Фурье на основе формул дискретного преобразования Фурье (ДПФ), стали за последнее десятилетие одним из основных средств математического обеспечения современных ЭЦВМ и получили практическое применение при решении ряда современных проблем в физике, биологии и технике [1—3].

Существует ряд вариантов БПФ, различными путями реализующих эффективные вычислительные процессы согласно формулам ДПФ [4, 5]. В большинстве работ, однако, не исследуется эффективность самих формул ДПФ по сравнению с другими численными методами вычисления интегральных преобразований Фурье. Между тем, существует ряд численных методов вычисления этих преобразований [6—9], эффективность которых по точности расчетов может быть выше, чем у формул ДПФ. В частности, в недавно опубликованной работе [10] показано, что гауссовский метод численного интегрирования существенно повышает точность алгоритма БПФ. Однако, этот метод ограничивается использованием функций, заданных в аналитическом виде.

В данной работе проводится сравнительный анализ формул ДПФ с формулами приближенного расчета преобразования Фурье с использованием кусочно-линейной аппроксимации исходной функции, которая может быть задана совокупностью значений в равноотстоящих точках или аналитической функцией. Этот метод расчета, основанный на аппроксимации преобразуемой функции отрезками прямых, сопрягающихся в ее равноотстоящих ординатах, сокращенно обозначим КЛПФ (кусочно-линейное преобразование Фурье).

Метод КЛПФ. Метод приближенного вычисления интегралов Фурье путем замены исходной функции отрезками прямых, сопрягающихся в ее равноотстоящих ординатах, рассматривается в вычислительной математике как частный случай многочленной интерполяции [11, 12]. В силу своей относительной простоты этот метод получил широкое применение при решении практических задач, хотя известны попытки использования более сложных вычислительных процедур, основанных на способах аппроксимации отрезками третьей [13] и более высоких степеней [14]. На основе метода кусочно-линейной аппроксимации разработан ряд графо-аналитических методов, теми или иными способами обеспечивающих упрощение вычислительных процессов [6—9, 15].

Широкое применение получили методы трапецеидальных [8, 15] и треугольных [6] частотных характеристик, в которых кусочно-ломаная аппроксимирующая кривая представляется в виде суммы типовых трапеций или треугольников, частотные спектры которых табулированы [16]. Аналогичные принципы используются в модификациях этих методов, связанных с использованием различных форм преобразований Фурье [17—19].

В последнее десятилетие благодаря развитию современных машинных алгоритмов расчета преобразований Фурье графо-аналитические методы, основанные на методе кусочно-линейной аппроксимации, утратили свое значение. Но очевидно, что метод КЛПФ может служить основой для построения машинных алгоритмов спектрального анализа данных. Для решения вопроса о целесообразности построения этих алгоритмов необходим сравнительный анализ методов КЛПФ и ДПФ в отношении точности расчетов, удобства реализации на ЦВМ и времени машинных вычислений.

Сравнительный анализ методов. Для исследования методов ДПФ и КЛПФ заметим, что процесс вычисления частотных спектров согласно им может быть подразделен на два этапа: 1) аппроксимацию анализируемого процесса во временной области суммой базисных функций; 2) расчет искомого частотного спектра путем суммирования спектральных характеристик базисных составляющих.

Пусть $h(t)$ — преобразуемая функция времени, заданная своими дискретными равноотстоящими значениями $h(k\cdot\Delta t)$ в точках $k\cdot\Delta t$ ($k=0,1,\ldots,N$), где Δt — шаг дискретизации, $N+1$ — число отсчетов.

Представим $h(t)$ в виде

$$h(t)=\sum_{k=0}^{N} h(k\cdot\Delta t)\cdot\varphi_k(t), \tag{1}$$

где $\varphi_k(t)$ — базисные функции, определяемые следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} &\varphi_k(k\cdot\Delta t)=1;\\ &\varphi_k(m\cdot\Delta t)=0 \quad \text{при } m\neq k;\\ &\varphi_k(t)=\varphi_0(t-k\cdot\Delta t). \end{aligned} \tag{2}$$

С учетом последнего равенства, выражение (1) может быть представлено в виде

$$h(t)=\sum_{k=0}^{N} h(k\cdot\Delta t)\cdot\varphi_0(t-k\cdot\Delta t). \tag{3}$$

Если анализируемый процесс аппроксимирован согласно уравнению (3), то частотный спектр $H(j\omega)$ определяется выражением

$$H(j\omega) = \varphi_0(j\omega)\cdot\sum_{k=0}^{N} h(k\cdot\Delta t)\cdot e^{-j\omega k\Delta t}, \tag{4}$$

где $\varphi_0(j\omega)$ — частотный спектр функции $\varphi_0(t)$.

При использовании метода ДПФ функция $\varphi_0(t)$ (рис. 1а) выражается следующим образом:

$$\varphi_0(t) = \frac{\sin\omega_c t}{\omega_c t}, \tag{5}$$

где $\omega_c = \dfrac{\pi}{\Delta t}$.

При использовании метода КЛПФ $\varphi_0(t)$ может быть представлена в виде показанного на рис. 1а треугольного импульса.

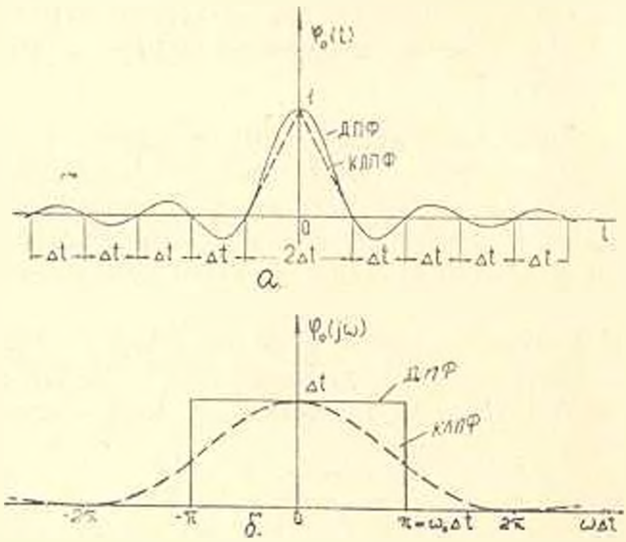


Рис. 1. *а* — базисные функции; *б* — частотные спекторы базисных функций.

Частотные спектры рассмотренных базовых функций определяются следующими соотношениями:

1) В случае ДПФ — $\varphi_0(j\omega) = \Delta t$, при $|\omega| < \omega_c$;

$$\varphi_0(j\omega) = 0, \quad \text{при } |\omega| > \omega_c; \tag{6}$$

2) В случае КЛПФ — $\varphi_0(j\omega) = 2\dfrac{1-\cos\omega\Delta t}{\omega^2\Delta t}$. (7)

Рассмотренные функции $\varphi_0(j\omega)$ представлены на рис. 1б. Сравнение их показывает, что частотные спектры базисных функций (5) ограничены значением ω_c, вследствие чего расчет частотных спектров по формулам ДПФ имеет аналогичное ограничение. На частотные спектры, рассчитываемые методом КЛПФ, оно не распространяется, поскольку функции (7) не имеют ограничения по частоте. Анализ формулы расчета $H(j\omega)$ (4), с учетом соотношений (6) и (7), показывает, что основной объем вычислений, связанный с расчетом сумм в выражении (4), одинаков как при использовании метода ДПФ, так и метода КЛПФ. Поскольку расчет выражений, входящих под знак суммы в уравнении (4), осуществляется с помощью алгоритмов БПФ [20], очевидно, что метод КЛПФ при машинных расчетах может быть реализован на основе алгоритмов БПФ.

Одним из преимуществ метода КЛПФ, по сравнению с ДПФ, является то, что он теоретически не имеет ограничения по частоте которое практически возникает, будучи связанным с шагом дискретизации Δt и частотой ω_c, поскольку погрешности аппроксимации во временной области зависят от Δt. Тем не менее, как показали результаты расчетов в приводимом ниже примере, метод КЛПФ позволяет вести расчет частотных спектров до значений, в несколько раз превышающих ω_c.

Другое преимущество метода КЛПФ, по сравнению с ДПФ, проявляется в тех случаях, когда анализируемая функция имеет разрывы первого рода на отрезке $(0, N\cdot\Delta t)$ или на концах заданного отрезка времени в точках $t=0$ и $t=N\cdot\Delta t$. Действительно, пусть анализируемая функция $h(t)$ имеет отличные от нуля значения $h(0)$ и $h(N\cdot\Delta t)$ и пусть

$$h(t)=0 \quad \text{при} \quad t<0 \quad \text{и при} \quad t>N\cdot\Delta t, \tag{8}$$

как показано на рис. 2. При аппроксимации ее выражением (3) с базисными функциями (5) аппроксимирующее выражение не может удовлетворить условию (8), поскольку функции (5) отличны от нуля на всей числовой оси. Это обстоятельство обусловливает значительные погрешности при расчете в аналогичных случаях частотных спектров по формулам ДПФ. В случае метода КЛПФ для соблюдения условия (8) аппроксимирующая функция обрезается на концах отрезка, как показано на рис. 2. Это достигается тем, что в точках $t=0$ и $t=N\cdot\Delta t$ располагаются вершины прямоугольных треугольников $\alpha_1(t)$ и $\alpha_N(t)$. В этом случае формулы расчета частотного спектра приобретают вид:

$$H(j\omega)=2\,\frac{1-\cos\omega\cdot\Delta t}{\omega^2\Delta t}\sum_{k=0}^{N-1}h(k\cdot\Delta t)\,e^{-j\omega k\Delta t}+$$

$$+h(0)\,\alpha_1(j\omega)+h(N\cdot\Delta t)\cdot\alpha_1^*(j\omega)\,e^{-j\omega N\Delta t}, \tag{9}$$

$$\alpha_1(j\omega)=\frac{1-\cos\omega\cdot\Delta t}{\omega^2\Delta t}-\frac{j}{\omega}\left(1-\frac{\sin\omega\Delta t}{\omega\Delta t}\right), \tag{10}$$

где $\alpha_1(j\omega)$ — функция, описывающая частотный спектр треугольного импульса $\alpha_1(t)$, а $\alpha_1^*(j\omega)$ — сопряженная с ней функция комплексной частоты.

Представление формул спектрального анализа в виде выражения (9) не меняет выводов относительно применимости алгоритмов БПФ и примерно равных затрат машинного времени при использовании методов ДПФ и КЛПФ. Действительно, исходя из того, что при расчете частотных спектров обычно задается не менее нескольких сот отсчетов, ясно, что основной объем вычислений связан с расчетом сумм в выражении (9), который выполняется на основе алгоритмов БПФ. Расчеты поправок, учитывающих спектры функций $\alpha_1(t)$ и $\alpha_N(t)$, занимают при этом незначительный процент от общих затрат машинного времени.

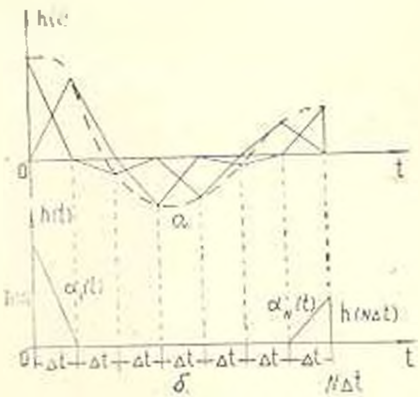


Рис. 2. Аппроксимация анализируемой функции: *а* — равнобедренными треугольниками внутри отрезка аппроксимации; *б* — прямоугольными $a_1(t)$ и $a_N(t)$ — на его концах.

Ниже приводятся примеры, иллюстрирующие погрешности расчета частотных спектров путем сравнения теоретических кривых с расчетными, полученными методами ДПФ и КЛПФ. Расчеты выполнены на ЭВМ «Наири-2».

Пример 1. По переходной функции $H(t)$ колебательного звена с постоянной времени $T = 1$, коэффициентом затухания $\xi = 0{,}6$ и передаточным коэффициентом $k = 1$ рассчитаны его частотные характеристики. Приближенный расчет преобразований Фурье согласно методам ДПФ и КЛПФ производился от функции $h(t) = 1 - H(t)$, которая удовлетворяет условию $h(t) \to 0$ при $t \to \infty$, необходимому для существования интегралов. Далее, по частотным спектрам функции $h(t)$ рассчитывались спектры функции $H(t)$ и частотные характеристики колебательного звена.

На рис. 3а показана амплитудная частотная характеристика колебательного звена, вычисленная по точным формулам, и приближенные характеристики, рассчитанные методами ДПФ и КЛПФ по одному и тому множеству дискретных ординат анализируемой функции, взятых с шагом дискретизации $\Delta t = 0{,}05$ *отн. ед.* На рис. 3б представлены кривые ошибок, причем кривая, полученная из расчетов по формулам КЛПФ, увеличена в 10 раз.

Как следует из представленных данных, в рассматриваемом случае формулы ДПФ в определенных диапазонах частот дают ошибки, значительно превышающие их при расчетах методом КЛПФ. При рассмотрении погрешностей выделим два частотных диапазона: $\omega > \omega_c$ и $\omega < \omega_c$. Как отмечалось, формулы ДПФ не применимы для частот $\omega > \omega_c$, в то время, как на метод КЛПФ это ограничение не распространяется.

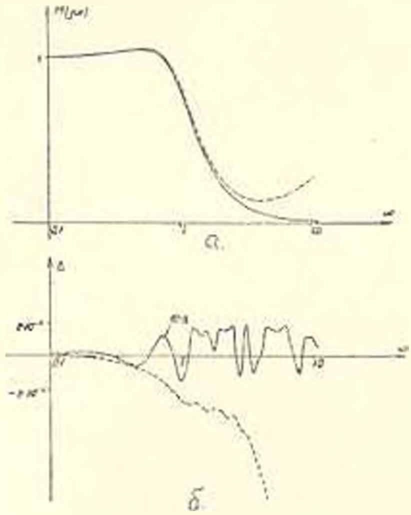


Рис. 3. *а* — сплошная кривая — амплитудная частотная характеристика (АЧХ) колебательного звена, рассчитанная по точным формулам; с ней в масштабе рисунка слипается кривая, рассчитанная методом КЛПФ. Пунктирная кривая — АЧХ, рассчитанная методом ДПФ; *б* — кривые ошибок при расчетах АЧХ методами КЛПФ (сплошная кривая) и ДПФ (пунктирная кривая).

Причину возникновения значительных ошибок при расчетах по формулам ДПФ в области частот $\omega < \omega_c$ следует искать в погрешностях аппроксимации рассматриваемой функции при $t=0$, где она претерпевает разрыв первого рода. На рис. 4а представлены аппроксимируемая кривая $h(t)$ и функция $\overline{h(t)}$, соответствующая аппроксимации базовыми функциями (5), согласно выражению (3). Кривые ошибок аппроксимации представлены на рис. 4б. Как видно из рисунка, функцию $\overline{h(t)}$ можно представить в виде упругой нити, жестко закрепленной в точках, соответствующих значениям $h(k\cdot\Delta t)$. В случае резких изменений между соседними точками, функция $\overline{h(t)}$ дает значительные погрешности аппроксимации на промежутках между узловыми точками. Такое поведение наблюдается в окрестности точки $t = 0$, что обусловливает значительные погрешности при аппроксимации в области времени и, соответственно, при расчете частотных спектров. Метод КЛПФ менее чувствителен к разрывам преобразуемой функции, что следует из анализа приведенных на рис. 3 и 4 кривых ошибок.

Пример 2. Для исследования точности рассматриваемых алгоритмов при анализе текущих спектров, необходимость которого возникает при исследовании нестационарных процессов, нами были рассчитаны текущие спектры экспоненциальной функции вида $y = A\cdot e^{-at}$ и сравнены с теоретическими, вычисленными по точным формулам. Текущий спектр функции времени, определенный на некотором конечном интервале $[0, T_m]$, вычисляется по отрезкам $mT = T_m (m = 1, 2, ..., M)$, на концах которых преобразуемая функция имеет разрывы первого рода.

На рис. 5а представлены текущие спектры амплитуд, рассчитанные по 120 ординатам исходной функции для моментов времени $t = 2T$, $t = 4T$ и $t = 6T$ по точным формулам (сплошные кривые), методу КЛПФ (точечные кривые) и формулам ДПФ (пунктирные кривые) для диапазона частот 0,01—100 *гц*. Расчеты по методу КЛПФ обеспечивают практическое совпадение со спектрами исходной функции, определенными по точным формулам.

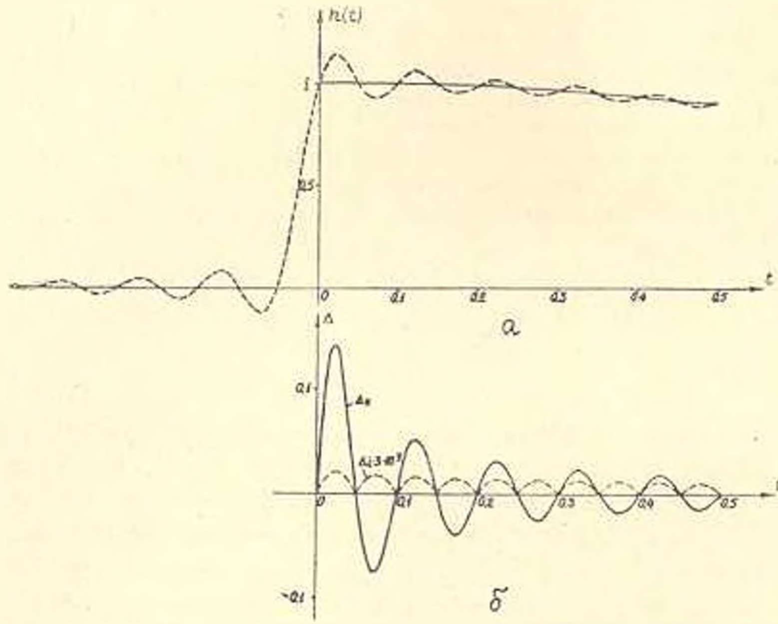
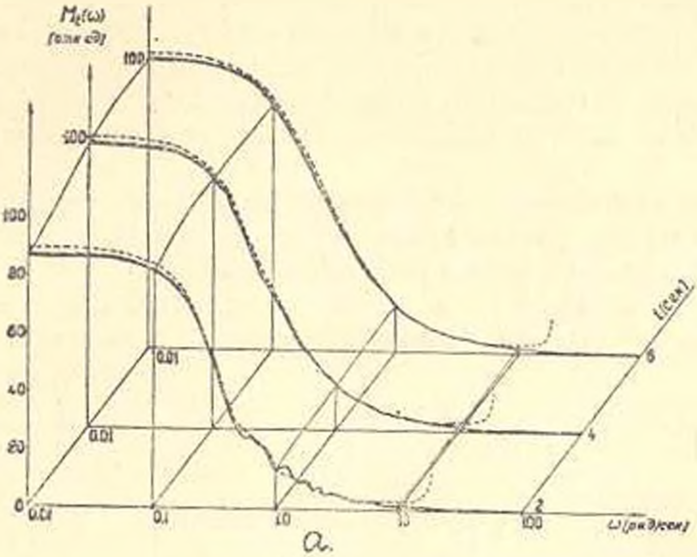


Рис. 4. *а* — функции $h(t)$ (сплошная кривая) и $\overline{h(t)}$ (пунктирная кривая) для колебательного звена. В масштабе рисунка кусочно-ломаная аппроксимирующая кривая практически совпадает с графиком функции $h(t)$; *б* — кривые ошибок для случаев аппроксимации функции $h(t)$ кусочно-ломаной кривой (пунктирная кривая) и функцией $\overline{h(t)}$ (сплошная кривая)

Расчеты по формулам ДПФ дают значительные ошибки в начале частотного диапазона и начиная с граничной частоты ω_c. Соответствующие кривые ошибок представлены на рис. 5б, где сплошные линии относятся к расчетам по формулам ДПФ, а затемненные части — ошибкам расчета по методу КЛПФ.

Как было показано выше, причина возникновения значительных ошибок при расчете частотных спектров по формулам ДПФ связана с неточностями аппроксимации базовыми функциями (5) поведения преобразуемой функции в точках разрывов; метод КЛПФ в значительно меньшей степени чувствителен к разрывам исходной функции.



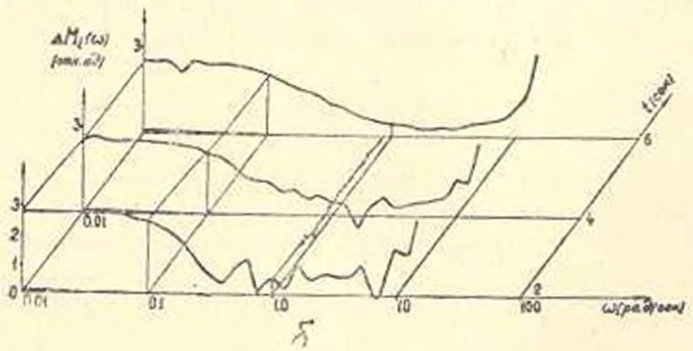


Рис. 5. *а* — амплитудные текущие спектры; *б* — кривые ошибок текущих спектров.

Выводы

Анализ приведенных результатов, а также ряд других расчетов, выполненных авторами [21, 22], позволяют сделать следующие выводы.

1. Метод КЛПФ при равных условиях требует практически таких же затрат машинного времени, как и ДПФ.

2. При расчете частотных спектров в равномерных шкалах частот вычисления по формулам метода КЛПФ могут осуществляться с помощью алгоритмов БПФ.

3. Метод КЛПФ дает возможность с практически высокой точностью рассчитывать частотные характеристики для значений, больших граничной частоты ω_c, т. е. в диапазонах, для которых метод ДПФ не применим.

4. В области частот $\omega < \omega_c$ методы ДПФ и КЛПФ имеют практически одинаковую точность, за исключением случаев, когда преобразуемая функция имеет на некоторых участках разрывы первого рода. В этих случаях метод ДПФ дает значительные погрешности расчета частотных характеристик, которые существенно меньше при использовании метода КЛПФ.

5. При необходимости обеспечения одинаковой точности расчета частотных спектров, метод КЛПФ в ряде случаев требует задания существенно меньших массивов исходных данных.

Это дает основание рекомендовать метод КЛПФ в качестве основы для построения машинных алгоритмов спектрального анализа.

Институт физиологии
АН АрмССР

Поступило 17.III.1977

Դ. Ս. ՄԵԼՔՈՆՅԱՆ, Ա. Ա. ՂԱԶԱՐՅԱՆ

ՏՎՅԱԼՆԵՐԻ ՍՊԵԿՏՐԱԼ ԱՆԱԼԻԶԻ ՈՐՈՇ ՄԵՔԵՆԱՅԱԿԱՆ ԱԼԳՈՐԻԹՄՆԵՐԻ ՀԵՏԱԶՈՏՈՒԹՅՈՒՆԸ

Ամփոփում

Հոդվածում կատարված է Ֆուրյեի ինտեգրալ վերափոխումների մոտավոր հաշվման մեթոդի վերլուծություն՝ համեմատելով Ֆուրյեի կտոր-գծային վերափոխման (ՖԿԳՎ) մեթոդը Ֆուրյեի դիսկրետ վերափոխման (ՖԴՎ) բանաձևերի հետ։

Հաշվարկի տիպային օրինակի վրա ցույց է տրված ճշտության առումով ՖԿԳՎ մեթոդի զգալի առավելությունները բարձր հաճախականությունների տիրույթում և ցածր հաճախականությունների տիրույթում՝ այն դեպքում, երբ վերափոխվող ֆունկցիան ունի առաջին կարգի խզում։ Այն բանի հիման վրա, որ ՖԿԳՎ մեթոդը պահանջում է մեքենայական ժամանակի նույնպիսի ծախս, ինչ որ ՖԴՎ-ն և կարող է իրացվել Ֆուրյեի արագ վերափոխման ալգորիթմի օգտագործմամբ, եզրակացվում է, որ նպատակահարմար է ՖԿԳՎ մեթոդի հիման վրա կառուցել սպեկտրալ անալիզի ալգորիթմները։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дженкинс Г., Ваттс Д.* Спектральный анализ и его приложения. Изд. «Мир», М., 1971—1972.
2. *Childers D. G.* Journ. of the Franklin Inst., v. 297—298, 1974, 103.
3. *Курьянов Б. Ф., Медведева Л. Е.* Гармонический анализ стационарных случайных процессов (с использованием быстрого преобразования Фурье). Изд. ВЦ МГУ, М., 1970.
4. *Рэйдер Ч.* Дискретные преобразования Фурье для случая, когда число выборочных величин является простым числом. ТИИЭР, т. 56, № 7, 1968.
5. *Бергланд Г. Д.* Руководство к быстрому преобразованию Фурье. «Зарубежная радиоэлектроника», № 3, 1971, с. 52—72.

6. *Воронов А. А.* Приближенное построение кривых переходного процесса по вещественной частотной характеристике. «Автоматика и телемеханика», № 6, 1952, с. 747—749.
7. *Соколов Н. Л.* Приближенный графоаналитический метод определения амплитудно-фазовых характеристик по переходным функциям. Сб. «Тр. Моск. авиац. ин-та», вып. 112, 1959, с. 66—72.
8. *Солодовников В. В.* О применении трансцендентных частотных характеристик к анализу качества систем автоматического регулирования. «Автоматика и телемеханика», № 6, 1949, с. 747—747.
9. *Адонц Г. Т.* Многополюсник. Изд. АН АрмССР, Ереван, 1965.
10. *Хоун Л. Л.* Гауссовский алгоритм вычисления БПФ. ТИИЭР, т. 63, № 9, 1975, с. 102—103.
11. *Filon L. N. G.* Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 49, 38 (1928—1929).
12. *Крылов В. И., Шульгина Л. Т.* Справочная книга по численному интегрированию. Физматгиз, М., 1966.
13. *Eggleston J. M., Methews C. W.* Application of several methods for determining transfer functions and frequency response of aircraft from flight data. NACA, 1954, Rep. 1204.
14. *Laverne M. E., Boksenbom A. S.* Frequency response of linear system from transient data. NACA, 1950, Rep. 977.
15. *Brown G. S., Campbell D. P.* Principles of servomechanisms. N. Y. — London, 1948.
16. *Солодовников В. В., Топчеев Ю. И., Крутикова Г. В.* Частотный метод построения переходных процессов с приложением таблиц и номограмм. Гостехтеоретиздат, М., 1955.
17. *Эндрю Дж., Поли Дж.* Определение частотных характеристик самолета по переходным процессам, записанным во время летных испытаний. Сб. «Вопросы ракетной техники», ИЛ, вып. 4 (16), 1956, с. 15—17.
18. *Березин С. Я.* Графо-аналитический метод построения амплитудно-фазовых характеристик систем автоматического управления и стабилизации. «Электричество», № 4, 1970, с. 57—61.
19. *Кловский Д. Д.* Приближенный графоаналитический способ построения частотных характеристик линейной системы по переходным характеристикам. ЖТФ, т. 25, вып. 2, 1955, с. 333—338.
20. *Кокрен В. Т.* и др. Что такое быстрое преобразование Фурье? ТИИЭР, т. 55, № 10, 1967, с. 7—17.
21. *Мелконян Д. С., Газарян А. А., Мелконян А. А.* и др. Алгоритм расчета текущих спектров биосигналов. «Биол. журнал Армении», т. XXIX, № 9, 1976.
22. *Melkonian D. S.* In: „Advances in Electrophysiology and pathology of Visual System". p. 203, Leipzig, 1968.