ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Տեխնիկական գիտութ. սերիա XXXI, № 2, 1978 Серия технических наук

ЭНЕРГЕТИКА

Л. М. БАБАЯН, А. А. БАБАДЖАНЯН, А. Н. ГУБИНСКИЙ, А. Ф. ДЬЯКОВ

МЕТОД РАСЧЕТА НАДЕЖНОСТИ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ ПУТЕМ АНАЛИЗА СТОХАСТИЧЕСКИХ ГРАФОВ

При анализе восстанавливаемых систем, например АСУ, систем «человек-техника», достаточно знать показатели надежности (коэффициент готовности, наработка системы на отказ, среднее время восстановления и др.) только в установившемся режиме. Определение этих показателей сводится к вычислению финальных вероятностей марковской системы, охватывающей широкий класс прикладных задач.

Начало исследований марковских систем топологическим методом было положено работами [1, 2], где вычисление финальных вероятностей сводилось к анализу топологии графа, соответствующей матрице переходных вероятностей.

В статье проводится исследование сложной системы, представляемой марковской цепью на основе топологического метода. Выбор этого метода обуславливается его определенными преимуществами — наглядностью, высокой точностью, отсутствием необходимости составления уравнений, а также возможностью получения результата в численно-символическом виде. Однако, использование теории графов для анализа сложных систем сопряженно с известными трудностями. Настоящая работа направлена на упрощение расчетных процедур, связанных с решением определенного класса задач теории надежности. В ней предлагается способ прямого определения вероятности нахождения системы в фиксированном подмножестве состояний, основанный на непосредственном анализе топологии графа.

Необходимость такого способа следует из самого вида показателей надежности, а ее эффективность особенно заметна при большом числе состояний как непрерывной, так и дискретной цепи Маркова.

Предложенный метод расчета проводится на примере одного из основных показателей надежности коэффициента готовности $K_т$ и среднего времени восстановления $T_в$ технических средств.

1. Математическая постановка задачи.

Пусть дана марковская цепь с матрицей переходных вероятностей $P = \|p_{ij}\|$ и конечным числом состояний $N = \{1, \ldots, n\}$, которой ставится в соответствие граф Мейсона $G = (XU)$, где каждая першина x_i есть i-ое состояние системы, а дугам $u_{ij} = (x_i x_j)$ $(x_i, x_j \in X)$ приписаны соответствующие веса p_{ij} (здесь и далее терминология по [3]).

Топологическое представление финальной вероятности i-го состояния эргодической однородной марковской цепи имеет вид [1, 2, 4]:

$$p_i = \frac{\Delta(G_i)}{\sum_{j=1}^{n} \Delta(G_j)}, \tag{1}$$

где $\Delta(G_j)$ — определитель подграфа G_j, полученный из исходного графа G путем удаления j-ой вершины с инцидентными ей дугами.

Согласно определению, имеет место следующее соотношение $\Delta(G_i) = D_i$, где D_j — главный минор матрицы $E-P$, соответствующий j-му элементу; E — единичная матрица.

Таким образом, задача вычисления коэффициента готовности сводится к нахождению вероятности вида

$$P_J = \sum_{i \in J} p_i = \frac{\sum_{i \in J} \Delta(G_i)}{\sum_{j=1}^{n} \Delta(G_j)}, \tag{2}$$

где J — фиксированное подмножество состояний.

Предложенный метод позволяет непосредственно по топологии специального графа G_k^{**} получить вид (2).

Граф G_k^{**} строится из заданного графа G следующим образом:

а) удаляются все дуги, входящие в вершину x_k (включая петлю);

б) при $k \in J$ добавляется $(|J|-1)$ количество дуг u_{ik} $(i \in J,\ i \neq k)$ с весами, равными -1;

в) при $k \overline{\in} J$ добавляется $|J|$ количество дуг u_{ik} $(i \in J)$ с весами, равными -1 и петля u_{kk} с весом $+1$, где $|J|$ — число элементов множества $J \subset N$.

Покажем, что в этом случае справедливо соотношение:

$$\sum_{i \in J} \Delta(G_i) = \Delta(G_k^{**}). \tag{3}$$

Из способа построения графа G_k^{**} и свойства линейности определителя матрицы относительно столбца, имеем:

$$\Delta(G_k^{**}) = \sum_{i \in J} \Delta(G_k^i), \tag{4}$$

где G_k^i — суграф, получаемый из графа G_k^{**} путем удаления его дуг, кроме одной u_{ik} $(i \neq k)$ и $\Delta(G_k^k) = \Delta(G_k)$, если $k \in J$.

Известно [6], что $D_{ik} = D_i$ для любых $i = 1, \ldots, n$, где D_{ik} — алгебраическое дополнение ik-го элемента матрицы $E-P$.

Из построения суграфа $G_k^{'}$ следует:

$$\Delta (G_k^{'}) = D_{ik} = D_i = \Delta (G_i). \tag{5}$$

Из (4) и (5) получаем (3).

Очевидно, что для практических приложений построение графа $G_k^{''}$ нужно проводить для $k \in J$. Значения $\Delta (G_k^{''})$ одинаковы при любом выборе вершины x_k.

В частном случае, при $J = N$ граф $G_k^{''}$ совпадает с графом $G_l^{'}$, построенным в [2], т. е. $G_k^{''} = G_l^{'}$ при $J = N$ $(k, l \in N)$.

Итак, на основании (3) вероятность нахождения системы в подмножестве J будет иметь вид:

$$p_J = \frac{\Delta (G_k^{''})}{\Delta (G_l^{'})}. \tag{6}$$

Вычисление определителей выражения (6) на основании правила контуров Мейсона [7] сводится тем самым к определению топологических образований всего двух графов $G_k^{''}$ и $G_l^{'}$ $(k, l \in N)$.

2. Распространение предложенного метода на марковские цепи с непрерывным временем

Известно, что задание марковской цепи с непрерывным временем в виде вероятностного графа принципиально не отличается от представления марковской цепи с дискретным временем стохастическим графом [4, 5].

Рассмотрим пример расчета показателей надежности установившегося состояния системы, представляемой непрерывной марковской цепью.

Пример. Рассматривается режим работы двух агрегатов M_1 и M_2, находящихся в горячем резерве.

Интенсивности отказов и восстановлений первого обозначим λ_1 и μ_1, второго — λ_2 и μ_2, соответственно. Восстановление осуществляется одной ремонтной бригадой. Предполагается наличие бесконечного объема запасных частей и принадлежностей (ЗИП).

Требуется определить коэффициент готовности $(K_г)$ и среднее время восстановления $(T_в)$.

Граф перехода состояний системы (граф Коутса [8]), соответствующий матрице интенсивностей $A = \|a_{ij}\|$, представлен на рис. 1. В состоянии x_1 оба агрегата работоспособны. В состоянии x_2 (x_3) $M_1(M_2)$ отказал и восстанавливается, а $M_2(M_1)$ работоспособен. Состояние $x_4(x_5)$ соответствует отказу $M_2(M_1)$ при отказавшем и восстанавливающемся $M_1(M_2)$.

Напишем выражения коэффициента готовности и среднего времени восстановления рассматриваемой системы:

$$K_\Gamma = \frac{A_1 + A_2 + A_3}{A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5}, \qquad T_\text{в} = \frac{A_4 + A_5}{A_2 a_{42} + A_3 A_{53}}, \tag{7}$$

где $A_1, \ldots, A_5$ — главные миноры матрицы $A = \{a_{ij}\}$, $i = 1, \ldots, 5$. Множество работоспоспособных состояний есть $\{x_1 x_2 x_3\}$, неработоспособных — $\{x_4 x_5\}$, а подмножество граничных работоспособных состояний — $\{x_2 x_3\}$.

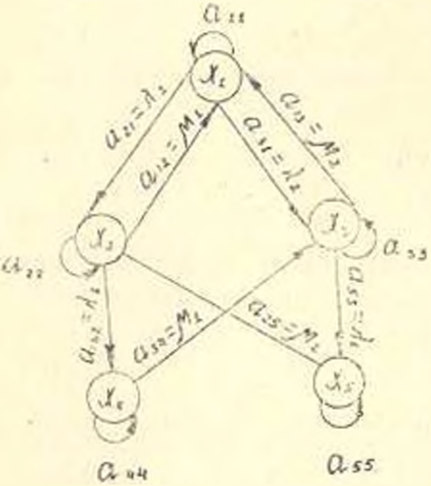

Рис. 1.

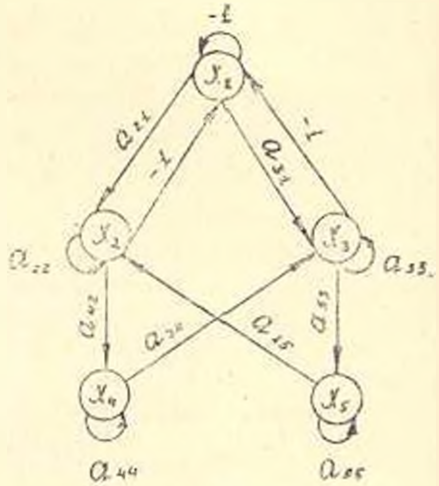

Рис. 2.

На рис. 2. 3 представлены вспомогательные графы для вычисления коэффициента готовности, а на рис. 4 ,5 — среднего времени восстановления, построенные по особому способу, изложенному в п. 1. Тогда выражение (7) примет вид

$$K_\Gamma = \frac{\Delta(G_1^{**})}{\Delta(G_1^{*})}, \qquad T_\text{в} = \frac{\Delta(G_5^{**})}{\Delta(G_2^{**})}.$$

Применяя правило Дозоера [8] для графов Коутса, получим:

$$K_\Gamma = \frac{\mu_1\mu_2[\lambda_1(\mu_1 + \lambda_1 + \lambda_2) + \lambda_2(\mu_2 + \lambda_1 + \lambda_2) + \mu_2\mu_1 + \lambda_1\mu_2 + \lambda_2\mu_1]}{\lambda_1\mu_2(\lambda_1+\lambda_2+\mu_2)(\mu_1+\lambda_2)+\lambda_2\mu_1(\lambda_1+\lambda_2+\mu_1)(\mu_2+\lambda_1)+\mu_1\mu_2(\lambda_1\mu_1+\lambda_2\mu_2+\mu_1\mu_2)},$$

$$T_\text{в} = \frac{\mu_2(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_2) + \mu_1(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1)}{\mu_1\mu_2[2(\lambda_1 + \lambda_2) + \mu_1 + \mu_2]}.$$

Из примера видно, что получение аналитического вида показателей надежности требует нахождения топологических образований всего двух графов $G^*_{\cdot}$, в отличие от других топологических методов [1, 2, 3, 4], где необходим такой же анализ n подграфов G_i, $i = 1, ..., n$.

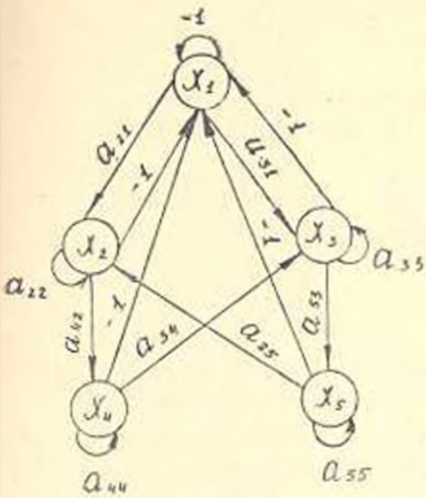

Рис. 3.

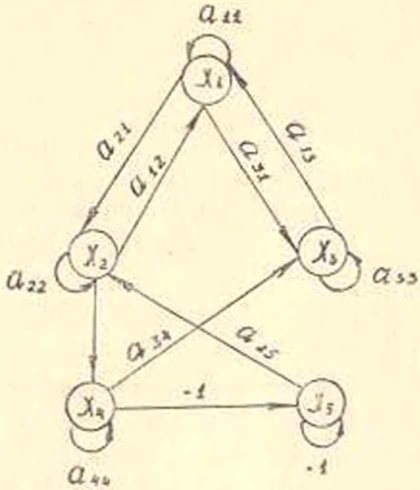

Рис. 4.

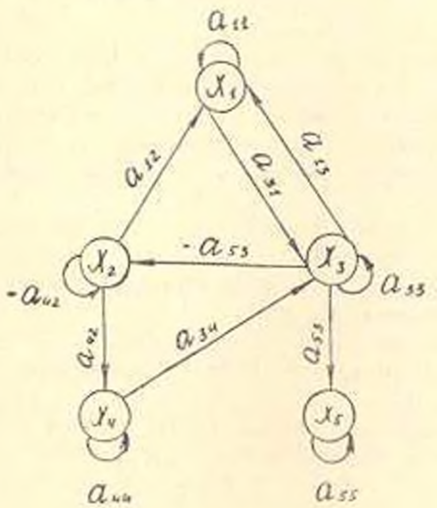

Рис. 5.

Выводы

1. Метод позволяет свести вычисление показателей надежности марковской системы (коэффициент готовности, среднее время восстановления и др.) к отношению определителей всего двух графов.

2. Определение показателей надежности в аналитическом виде позволяет оценить степень влияния отдельных параметров системы на конечный результат.

3. Предложенный подход подводит к задаче дальнейшего максимального упрощения аналитического вида показателей надежности, путем выделения общего подграфа для последующего его исключения, с целью получения наиболее простого вида решения.

АрмНИИЭ Поступило 2.IX.1977

Դ. Մ. ԲԱԲԱՅԱՆ, Ա. Ա. ԲԱԲԱՋԱՆՅԱՆ, Ա. Ի. ԴՈՒԲՐԻՆՍԿԻ, Ա. Ֆ. ԴՅԱԿՈՎ

ԲԱՐԴ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐԻ ՀՈՒՍԱԼԻՈՒԹՅԱՆ ՀԱՇՎԱՐԿԻ ՄԵԹՈԴԸ ՍՏՈԽԱՍՏԻԿ ԳՐԱՖՆԵՐԻ ԱՆԱԼԻԶԻ ՄԻՋՈՑՈՎ

Ամփոփում

Աշխատանքում առաջարկված է Մարկովյան համակարգերի տոպոլոգիական անալիզի մեթոդը, որը հնարավորություն է տալիս զգալիորեն պարզեցնել տեխնիկական միջոցների հուսալիության ցուցիչի արտահայտության մեջ մտնող հիմնական բաղադրիչի հետ կապված հաշվարկները։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Медведев Г. А.* Анализ дискретных марковских систем при помощи стохастических графов. «Автоматика и телемеханика», № 3, 1965.
2. *Бионди Е., Гуардабасси Г., Ринальди С.* Об анализе дискретных марковских систем при помощи стохастических графов. «Автоматика и телемеханика», № 2, 1967.
3. *Мелихов А. Н.* Ориентированные графы и конечные автоматы. Изд. «Наука», М., 1971.
4. *Червоный А. А., Лукьященко В. И., Котин Л. В.* Надежность сложных систем. Изд. «Машиностроение», М., 1972.
5. *Пантелей В. Г., Шубинский И. Б.* Расчетные методы оценки надежности приборов. Изд. «Машиностроение», М., 1974.
6. *Сарымсаков Т. А.* Основы теории процессов Маркова. Гостехиздат, М., 1954.
7. *Mason S. J.* Feedback Theory: Further Properties of Signal Flow Graphs. P. I. R. E., v. 44, № 7, July, 1956.
8. *Desoer C. A.* The optimum formula for the gain of a flow graph or a simple derivation of Coates Formula. P. I. R. E., May, 1960.