ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Տեխնիկական գիտութ. սերիա XXXI, № 2, 1978 Серия технических наук

ЭНЕРГЕТИКА

А. К. АБРАМЯН

АЛГОРИТМ ОПТИМИЗАЦИИ РЕЖИМОВ ЭНЕРГОСИСТЕМ С УЧЕТОМ КОЛЕБАНИЙ УРОВНЯ НИЖНЕГО БЬЕФА ГЭС

Рассматривается общая задача оптимального управления оперативными режимами энергосистем с учетом нестационарных процессов в нижних бьефах ГЭС и многочисленных ограничений в виде равенств и неравенств на параметры. При строгом подходе нестационарный процесс в нижнем бьефе ГЭС должен описываться системой дифференциальных уравнений с частными производными (уравнения Сен-Венана). При этом будем иметь дело с задачей оптимального управления с распределенными параметрами, которая существенно сложна и практически трудиореализуема. Разумеется, указанные факторы не могут служить основой отказа от строгого решения задачи, если с точки зрения критерия оптимальности это недопустимо.

Правомерность описания нестационарного процесса в нижнем бьефе ГЭС (НСП) обыкновенными дифференциальными уравнениями в определенных условиях, оговоренных в [4], экспериментально доказана рядом авторов (Картвелишвили Н. А., Горнштейн В. М., Обрезков В. И. и др.), а также исследованиями на конкретном объекте, проведенными сотрудниками АрмНИИЭ. Многочисленные исследования показывают, что расходные характеристики ГЭС и кривые потерь мощности в гидроблоках ГЭС за редким исключением невыпуклы. Из этого непосредственно следует, что задача оптимизации режимов энергосистем многоэкстремальна, причем, необоснованная замена ее одноэкстремальной приводит при решении к ощутимым ошибкам.

Предлагается алгоритм решения оптимизационной задачи с сосредоточенными параметрами, основанный на методе дискретного динамического программирования (ДДП) и позволяющий определить глобальный экстремум целевой функции в многоэкстремальной ситуации. На основе изложенного ниже алгоритма разработана программа на языке «Фортран-IV» и реализована на ЭВМ «ЕС-1022» для одной конкретной энергосистемы. Программа внедрена в опытно-промышленную эксплуатацию. Учет потерь активной мощности в электрических сетях, а также нестационарных процессов в нижних бьефах ГЭС значительно усложняет алгоритм и, как следствие, увеличивается необходимое для расчетов машинное время и используемый объем оперативной памяти ЭВМ. Время расчетов на ЭВМ «ЕС-1022» составило около 4-х минут. Расчеты были проведены и для случая, когда уровень нижнего бьефа ГЭС не меняется с целью выявления экономического эффекта, получаемого от учета нестационарного процесса. Отметим, что колебания кондиционности топлива, даже добываемого из одной шахты, влияют на расходные характеристики теплостанций, которые вводятся в программу в виде информации. Расчеты для сравнения проведены при совершенно идентичных характеристиках, поэтому колебания кондиционности топлива никак не влияют на сопоставление оптимальных режимов, полученных с учетом и без учета нестационарных процессов в нижних бьефах ГЭС. Это сопоставление показывает, что работа по оперативным режимам, рассчитанным с учетом нестационарных процессов, позволяет сэкономить 0,45—0,6% топлива.

Приводимый алгоритм предполагается использовать в дальнейшем в комплексе с алгоритмом расчета стационарных электрических режимов для более строгого учета потерь активной мощности в электрических сетях.

Математическая формулировка задачи. Минимизируемый функционал имеет вид:

$$I = \int_{0}^{T} B(\overline{P}_{\tau})\, dt, \tag{1}$$

где $B(\overline{P}_{\tau}) = \sum_{j=1}^{m} Ц_j B_j^{*}(P_{j\tau})$; $Ц_j$— стоимость тонны условного топлива с учетом транспортных расходов.

Как видно из (1), минимизируются суточные затраты по энергосистеме с учетом транспортных расходов по перевозке топлива.

В качестве управляющих параметров берутся вектор-функции $\overline{P}_{\tau} = (P_{1\tau}, \ldots, P_{m\tau})$ и $\bar{U} = (U_1, \ldots, U_n)$. Накладываются следующие ограничения:

$$F = \sum_{j=1}^{m} P_{j\tau} + \sum_{i=1}^{n} [gU(h - X) - \Delta P(X, U)]_i - P_c(t) - \pi \tag{2}$$

—баланс активных мощностей энергосистемы;

$$V_i = \int_{t_0}^{T} U_i(t)\, dt; \tag{3}$$

$$P_{j\tau}^{0} \leqslant P_{j\tau} \leqslant P_{j\tau}^{*}; \qquad U_i^{0} \leqslant U_i \leqslant U_i^{*}; \tag{4}$$

$$X_i^{0} \leqslant X_i \leqslant X_i^{*}; \tag{5}$$

$$a_{i+1}^{*} - a_i^{*} \leqslant A_i; \qquad a_i^{*} - a_i^{0} \leqslant A_i \qquad (i = 1, \ldots, n; \quad j = 1, \ldots, m). \tag{6}$$

Нестационарный процесс в нижнем бьефе ГЭС описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с кусочно-постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} X_i^1 = X_i^1 = f_i^1(X_i^2), \\ X_i^2 = d_{i4} U_i - d_{i1} X_i^2 - d_{i2} X_i^1 - d_{i3} = f_i^2(X_i^1, X_i^2, U_i), \end{cases} \tag{7}$$

с начальными условиями $X_i^1(0) = C_i^1$, $X_i^2(0) = C_i^2$.

Необходимость учета нестационарного процесса в нижнем бьефе ГЭС, а также правомерность и целесообразность такого математического моделирования этого процесса подробно исследованы в [4, 5].

В выражениях (1)—(7) приняты следующие обозначения, m, n — соответственно, числа тепловых и гидравлических электростанций в системе; P_{jT}, B_j^t — мощность и расход топлива по j-ой ТЭС за единицу времени ($j = 1, \dots, m$); U_i — расход воды через i-ю ГЭС ($i = 1, \dots, n$); g — ускорение свободного падения; h_i, X_i^1 — уровни верхнего и нижнего бьефов i-ой ГЭС; ΔP_i — потери мощности в гидроблоке i-ой ГЭС; P_s — суммарная активная нагрузка энергосистемы; π — потери активной мощности в электрических сетях; V_i — заданный объем воды, подлежащий расходованию на i-ой ГЭС за расчетный период (сутки); A — максимально допустимая амплитуда колебания $X_i(t)$, которая задается;

$$a_i^* = \max_{t \in [0, T]} X_i(t); \quad a_i^0 = \min_{t \in [0, T]} X_i(t); \quad a_{i0}^* = \max_{t \in [t_1, 0]} X_i(t), \quad t_1 = 0 - T;$$

$d_{i1}, \dots, d_{i4}$ — кусочно-постоянные коэффициенты; C_i^1, C_i^2 — начальные условия.

Здесь и далее индексами (°) и (*) обозначаются, соответственно, минимально и максимально допустимые значения величин.

Максимальное значение уровня нижнего бьефа за предшествующие сутки a_{i0}^* — в момент $t_0 = 0$ будет известно. Уровень верхнего бьефа ГЭС в течение суток изменяется незначительно и его значение можно брать постоянным $h_i = \text{const}$ ($i = 1, \dots, n$).

Для определения π целесообразно использование выражения суммарных потерь активной мощности через узловые мощности

$$\pi = \sum_{k=1}^{s-1} \sum_{l=1}^{s-1} \beta_{kl} P_k P_l, \tag{8}$$

где β_{kl} — коэффициенты потерь; s — число нагрузочных узлов.

Элементы матрицы β получаются из расчета стационарных режимов энергообъединений.

Для окончательного решения задачи необходимо задать условия на правом конце траекторий $X_i^1(t)$ и $X_i^2(t)$ ($i = 1, \dots, n$) в момент времени $t = T$. При фиксированном T с точки зрения эксплуатации системы наиболее реально правые концы траектории принять свободными.

Алгоритм. Дискретизируя задачу, заменим выражения (1), (2), (3) следующими

$$I = \sum_{\tau=1}^{l} B_{\tau}(\overline{P}_{\tau}), \qquad (9)$$

$$V_l = \Delta t \sum_{\tau=1}^{l} U_{r\tau}, \qquad (10)$$

$$F_{\tau}(\overline{U}_{\tau}, X_{\tau}, \overline{P}_{\tau}) = 0, \qquad (11)$$

где l — число интервалов (целесообразно принять $j = 24$, т. е. $\Delta t = 1$ час); $\overline{X}_1^l = (X_1^l, \ldots, X_n^l)$.

Для облегчения дальнейшего решения расходные характеристики ТЭС эквивалентируются, т. е. тепловая подсистема представляется одной крупной станцией с известной характеристикой $B_э(P_э)$. Это самостоятельная задача оптимизации режимов энергосистем, состоящих только из тепловых электростанций, поэтому имеет смысл отдельно привести алгоритм ее решения.

Требуется определить такой вектор $\overline{P}_т = (P_{1т}, \ldots, P_{mт})$, который минимизирует функцию

$$B(P_{1т}, \ldots, P_{mт}) = \sum_{j=1}^{m} B_j(P_{jт}) \qquad (12)$$

при следующих ограничениях:

$$\sum_{j=1}^{m} P_{jт} - \pi(\overline{P}_т) = P_c; \qquad P_{jт}^0 \leqslant P_{jт} \leqslant P_{jт}^* \qquad (13)$$

$$(j = 1, \ldots, m).$$

Искомое оптимальное распределение суммарной нагрузки можно определить итеративным путем. Для обеспечения быстрой сходимости итерационного процесса нужно иметь «хорошее» начальное приближение, в качестве которого лучше всего использовать режим, полученный без учета потерь активной мощности в электрических сетях. Эта задача легко решается методом ДДП.

Рекуррентные уравнения имеют вид:

$$\Phi_j(P_э) = \min\left[B_j(P_{jт}) + \Phi_{j-1}(P_э - P_{jт})\right]; \quad P_{jт}^0 < P_{jт} \leqslant P_{jт}^*. \qquad (14)$$

Реализуя уравнения (14) для $j = 1, \ldots, m$ и дискретных значений $P_э$ $(P_э^0 \leqslant P_э \leqslant P_э^*)$, можно построить функцию $B_э(P_э)$, где

$$P_э^0 = \sum_{j=1}^{m} P_{jт}^0, \quad P_э^* = \sum_{j=1}^{m} P_{jт}^*$$

и определить оптимальное распределение нагрузки между тепловыми станциями при каждом значении $P_э$ $(P_э^0 \leqslant P_э \leqslant P_э^*)$.

Для построения функции $B_э(P_э)$ с учетом потерь активной мощности в электрических сетях использована идея метода «локальных вариаций» с соответствующей коррекцией, необходимой для учета ограничений (13). Для каждого значения $P_э$ рассчитывается реальная величина $P'_э = \sum_{j=1}^{m} P_{j\tau} + \pi(\overline{P}_\tau)$ и соответствующее ей значение расхода топлива B, с учетом потерь по выражению (8). Значения $P_{j\tau}$ берутся из начального приближения, определенного по (14). Затем находится оптимальное распределение нагрузки между ТЭС при $P_э = P'_э$ и организуется быстро сходящаяся итерационная процедура до удовлетворения ограничения (13). Полученные значения векторов $\overline{P}_\tau$ не будут оптимальными, так как рекуррентные уравнения (14), из которых они определяются, построены без учета потерь.

Для дальнейшей минимизации функции $B(P_{1\tau}, \ldots, P_{n\tau})$ строится новый итерационный цикл, на каждой стадии которого варьируются по очереди все компоненты вектора $\overline{P}_\tau$ на величину ΔP, причем для того, чтобы не нарушалось ограничение (13), одновременно дается приращение ΔP другой компоненте. Если какая-либо вариация приводит к уменьшению значения функции $B(\overline{P}_\tau)$, то соответствующие две компоненты вектора $\overline{P}_\tau$ получают новые значения $P_{j\tau} + \Delta P$ и $P_{(j+r)\tau} - \Delta P_j$ $(r = 1, \ldots, m - j)$ и начинается варьирование следующей компоненты. Для уменьшения необходимого числа операций сначала делается вариация в том направлении ($+\Delta P$ или $-\Delta P$), которое привело к уменьшению функции на предыдущем шаге. Если от итерации к итерации функция уменьшается незначительно, то приращение ΔP следует уменьшить. Минимизация считается законченной, когда при достаточно малом ΔP не происходит существенного уменьшения функции $B(P_\tau)$.

Отметим, что этот способ удобен для программирования и имеет довольно быструю сходимость.

Определив из (11) $\sum_{j=1}^{m} P_{j\tau} = P_э$, получим для целевой функции следующее выражение:

$$I = \sum_{\tau=1}^{T} B_\tau(X^1_\tau, U_\tau). \tag{15}$$

Тогда задача оптимизации режимов энергосистем с учетом нестационарного процесса в нижнем бьефе ГЭС сводится к минимизации критерия качества (15) при ограничениях (4)—(6) и (10).

Основная трудность применения метода ДП[1] для решения этой задачи состоит в том, что функция $B_\tau(\overline{X}^1, \overline{U})$ является уже несепарабельной относительно $\overline{U} = (U_1, \ldots, U_n)$. Возникает проблема преодоления размерности программирования (при $n \geqslant 2$), которая в данном случае равна n, т. е. числу гидростанций, входящих в рассматриваемую электроэнергетическую систему. Указанную трудность можно преодолеть применением метода последовательных приближений (ПП). Схема метода следующая. В каждой итерации решается задача одномерного программирования при $(n-1)$ фиксированных законах управления, т. е. при „угаданных" $U_i(t)$ или $X_i^1(t)$ $(i=1, \ldots, n)$, $i \neq s$, где s — номер гидростанции, для которой $U_s(t)$ и $X_s^1(t)$ определяются методом ДДП.

Ограничения (4)—(6) учитываются путем ввода штрафных функций, имеющих несложный вид и легко реализуемых при использовании метода ДДП.

Для учета потерь активной мощности в электрических сетях на каждой итерации строится функция $B_\tau(P_s)$ одним из описанных в этой статье способов с небольшой разницей. Вместо P_s берутся возможные значения мощности одной из гидростанций $P_{\tau s}$ $(P^0_{\tau s} \leqslant P_{\tau s} \leqslant P^*_{\tau s})$, а потери рассчитываются с учетом фиксированных режимов остальных ГЭС. Здесь важно отметить, что функции $B_\tau(P_{\tau s})$ на каждой итерации меняются, т. к. меняются значения $P_{\tau i}$ и, следовательно, их надо считать заново.

Целевая функция при фиксированных $U_{i\tau}$ $(i=1, \ldots, n, \; i \neq s)$ принимает вид:

$$I^* = \sum_{\tau=1}^{T} B_{\tau\tau}(X^1_\tau, U_\tau) + K\sum_{\tau=1}^{T} H(E_\tau) + \lambda\left(\sum_{\tau=1}^{T} U_\tau - V\right). \qquad (16)$$

где K — заранее заданное большое число; $E_{1i} = a^*_{iii} - a^0_i - A_i \leqslant 0$; $E_{2i} = a^*_i - a^0_i - A_i \leqslant 0$; $E_{3i} = U^0_i - U_i \leqslant 0$; $E_{4i} = U_i - U^*_i \leqslant 0$.

Поскольку при наличии X^1_{i+1} и X^1_i из системы дифференциальных уравнений (7) однозначно определяется U_i, то выражение (16) для целевой функции можно заменить следующим:

$$I^* = \sum_{\tau=1}^{T} B_{\tau\tau}(X^1_\tau, X^1_{\tau+1}) + K\sum_{\tau=1}^{T} H(E_\tau) + \lambda\left|\sum_{\tau=1}^{T} U_\tau(X^1_\tau, X^1_{\tau+1}) - V\right|. \qquad (17)$$

Это означает, что целевая функция (17) является аддитивной. Рекуррентные соотношения, полученные из принципа оптимальности Беллмана, которые позволяют найти глобальное решение этой задачи, имеют вид:

$$\text{для первой стадии} - Z(X^1_1) = \min_{X_1 \in X} I^*(X^1_0, X^1_1) = \varphi_1(X^1_0, X^1_1); \qquad (18)$$

$$\text{для } \tau\text{-ой стадии} - Z_\tau(X^1_\tau) = \min_{X_\tau \in X} [Z^1_{\tau-1} X^1_{\tau-1}) + \varphi_\tau(X^1_{\tau-1}, X^1_\tau)]. \qquad (19)$$

Однако при реализации рекуррентных уравнений в приведенном виде мы получим решение, при котором не удовлетворяется весьма существенное на практике ограничение (10). Для получения истинного решения вводится функция

$$W = \frac{1}{2}\left(\sum_{\tau=1}^{j} U_{\tau} - V\right)^2 = 0 \tag{20}$$

и наряду с минимизацией основной целевой функции (17) находится и минимум функции (20). Для нахождения минимального значения функции (20) по U_τ можно применить градиентную схему, согласно которой организуется итерационный процесс, на каждом шаге которого реализуются уравнения (18)—(19) и определяется новое значение множителя λ по формуле:

$$\lambda^{k+1} = \lambda^k + \frac{dW}{d\sum U_\tau} \cdot \frac{\partial \sum U_\tau}{\partial \lambda} \cdot \Delta, \tag{21}$$

где Δ — шаг.

Вычислительный аспект. Описанный выше алгоритм, несмотря на сложность, довольно удобен для программирования. Вычислительная схема выглядит следующим образом.

1. Для определения начального приближения функции $B_\tau(P_\tau)$ составляется специальная подпрограмма, реализующая уравнения (14) при известных функциях $B_j(P_{j\tau})$ $(j = 1, ..., m)$ (расходные характеристики ТЭС задаются в табличном виде). Для каждого значения P_τ запоминаются оптимальные $P_{j\tau}$.

2. В качестве начального приближения функции $U_i(t)$ $(i = 1, ..., n,$ $i \neq S)$, $t \in [0, T]$ задаются в дискретной форме и решаются дифференциальные уравнения (7).

3. Вычисляются

$$\tilde{X}_{i\tau} = \frac{X^1_{i\tau} + X^1_{i(\tau+1)}}{2}, \qquad P_{i\tau} = gU_{i\tau}(h - \tilde{X}^1_{i\tau}) - \Delta P(\tilde{X}^1_{i\tau}, U_{i\tau}), \tag{22}$$

где ΔP задается в виде многочлена.

4. Корректируются функции $B_\tau(P_{\tau})$ с учетом потерь для каждого часа, причем вместо P_τ берутся возможные значения мощности s-ой ГЭС $P_{s\tau}$. При расчете потерь по выражению (8) учитываются вычисленные в пункте 3 значения $P_{i\tau}$ $(i = 1, ..., n;\ i \neq s;\ \tau = 1, ..., j)$.

5. Задается значение λ^0_τ.

6. Для $\tau = 1$ при дискретных значениях X^1_{s1}, удовлетворяющих ограничениям (4)—(5), решается система (7) и определяется U_{s1}.

7. По выражениям, аналогичным (22), вычисляются $\tilde{X}^1_{s1}$ и P_{s1}.

8. По P_{s1} из соответствующей функции $B_1(P_{s1})$, рассчитанной в пункте 4, определяется значение расхода топлива и целевой функции I^* по выражению (17).

9. Вычисления, изложенные в пунктах 6—8, повторяются для $\tau = 2, ..., j$ и рассчитываются функции $Z_2(X^1_{s2}), ..., Z_j(X^1_{sj})$.

10. Поскольку правые концы траекторий свободны, по минимальному значению $Z_j(X^1_j)$ обратным ходом определяются $X^1_s(\tau)$ и $U_s(\tau)$, $\tau = 1, \ldots, j$.

11. По выражению (21) определяется новое значение λ_s, причем производная $\frac{\partial \sum U_\tau}{\partial \lambda}$ рассчитывается численно заданием пробного шага $\Delta\lambda$.

12. Пункты 6—11 повторяются до удовлетворения ограничения (10) с требуемой точностью.

13. Осуществляется переход к пункту 5 и описанная выше процедура последовательно производится для всех $s = 2, \ldots, n$. При $s = 1$ фиксируются $U_i(\tau)$ и $X_i(\tau)$, $i = 2, \ldots, n$, а при $s = \nu$ фиксированными считаются $U_i(\tau)$ и $X_i(\tau)$ $(i = 1, \ldots, n,\ i \neq \nu)$, где $U_{i\tau}$ $(i = 1, \ldots, \nu)$—оптимальные управления, вычисленные по (18)—(19).

14. После завершения первого итерационного цикла осуществляется переход к пункту 3, строятся новые функции $B_{э\tau}(P_{э r \tau})$. Здесь вместо произвольных $U_i(\tau)$ и $X^1_i(\tau)$ $(i = 1, \ldots, n)$, по которым вычисляются $P_{i r \tau}$, берутся определенные после первого итерационного цикла функции $U_i(\tau)$ и $X^1_i(\tau)$.

15. Итерационный процесс (п.п. 3—14) продолжается до выполнения условий:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{\tau=1}^{J} (U^{t+1}_{i\tau} - U^{t}_{i\tau})^2 \leqslant \varepsilon_1;$$

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{\tau=1}^{J} (P^{t+1}_{j r \tau} - P^{t}_{j r \tau})^2 \leqslant \varepsilon_2;$$

где ε_1 и ε_2 — заранее заданные достаточно малые числа.

16. Согласно полученным $U_i(\tau)$ и $X_i(\tau)$ вычисляются $P_{i r}(\tau)$ и по функциям $B_{э\tau}(P_{j r \tau})$ определяются оптимальные $P_{i r}(\tau)$ $(j = 1, \ldots, m)$, которые и являются окончательными.

АрмНИИЭ

Поступило 2.III.1977

Ա. Գ. ԱԲՐԱՄՅԱՆ

ԷՆԵՐԳՈՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐԻ ՌԵԺԻՄՆԵՐԻ ՕՊՏԻՄԻԶԱՑԻԱՅԻ ԱԼԳՈՐԻԹՄԸ՝ ՀԱՇՎԻ ԱՌՆԵԼՈՎ ՀԷԿ-Ի ՆԵՐՔԻՆ ԲՅԵՖԻ ՄԱԿԱՐԴԱԿԻ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԸ

Ամփոփում

Հոդվածում քննարկված է ջերմային և հիդրավլիկ կայաններից բաղկացած էլեկտրաէներգետիկական համակարգերի ռեժիմների օպտիմալ ղեկա-

վարման ընդհանուր խնդիրը՝ ՀԷԿ-երի ներքին բյեֆի ոչ ստացիոնար պրոցեսների էլեկտրական ցանցերում ակտիվ հզորության կորուստների հաշվառման դեպքում։ Բերված է այդ խնդրի լուծման ալգորիթմը՝ հիմնված դիսկրետ դինամիկ ծրագրավորման մեթոդի վրա։ Ծրագրավորման չափողականությունը կրճատելու համար հաջորդական մոտեցումների մեթոդով կազմակերպվում է իտերացիոն պրոցես։ Ալգորիթմը հնարավորություն է տալիս գտնել խնդրի գլոբալ լուծումը, երբ այն բազմաէքստրեմալ է և անթույլատրելի է նրա փոխարինումը միաէքստրեմալ խնդրով։ Բերված է նաև խնդրի լուծման հաշվողական սխեման, որի հիման վրա «Ֆորտրան-4» լեզվով կազմված է ծրագիր և կոնկրետ էներգահամակարգերի համար այն իրականացված է «ЕС-1022» *թվային հաշվիչ մեքենայի վրա։*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Михалевич В. С.* Последовательные алгоритмы оптимизации и их применение. «Кибернетика», №№ 1, 2, 1965.
2. *Крылов И. А., Черноусько Ф. Л.* Решение задачи оптимального управления методом локальных вариаций. «Ж. вычисл. матем. и матем. физ.», № 2, 1966.
3. *Адонц Г. Т.* Метод расчета установившегося режима электрической системы. «Электричество», № 5, 1972.
4. *Картвелишвили Н. А.* Влияние колебаний уровня нижнего бьефа ГЭС на оптимальный режим энергетической системы. «Изв. АН СССР. Энергетика и автоматика», № 5, 1961.
5. *Larson R. E.* State Increment Dynamic Programing, American Elsevier, New York, 1968.