ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Տեխնիկական գիտություններ, սերիա XXXI, № 1, 1978 Серия технических наук

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

Вл. А. АМБАРЦУМЯН

ПРОЕКТИРОВАНИЕ РАМНОЙ КОНСТРУКЦИИ МИНИМАЛЬНОГО ОБЪЕМА ПРИ ЗАДАННОМ ЗНАЧЕНИИ ОСНОВНОЙ ЧАСТОТЫ

Рассматриваются вопросы проектирования рамных конструкций минимального объема (массы) при заданном значении основной частоты свободных горизонтальных колебаний. Такая постановка задачи может быть рассмотрена как определенное приближение к сложной и в то же время актуальной проблеме оптимального проектирования сейсмостойких зданий и сооружений [1]. Например, можно предложить такую схему оптимального проектирования: сначала определяется частота основного тона свободных колебаний конструкции, исходя из условий минимума сейсмических нагрузок и различных прочностных или конструктивных требований, затем, по заданному значению основной частоты, синтезируется конструкция каркаса, но так, чтобы распределение материала было бы оптимальным.

Вопросу проектирования конструкций минимального объема (массы), при заданной собственной частоте, посвящены исследования [2÷7]. В них рассматриваются колебания стержней с различными опорными закреплениями. В настоящей работе рассматриваются горизонтальные колебания рамной системы.

Динамическая расчетная схема принимается в виде системы с конечным числом степеней свободы. Уравнения движения составляются используя метод деформаций, применение которого дает значительное преимущество для получения аналитического решения задачи. Схема рассматриваемой рамы приведена на рис. 1. Составим уравнения статической деформации под действием горизонтальных сил $P_1, P_2, \ldots, P_n$ [8]. Уравнение равенства моментов для узла ij имеет вид:

$$2s_{ij}\varphi_{i-1,\,j} + 2r_{i,\,j-1}\varphi_{i,\,j-1} + 4(s_{ij} + r_{i,\,j-1} + r_{i,\,j} + s_{i+1,\,j})\varphi_{ij} +$$

$$+ 2r_{ij}\varphi_{i,\,j+1} + 2s_{i+1,\,j}\varphi_{i+1,\,j} - 6\frac{s_{ij}}{H_i}y_i - 6\frac{s_{i+1,\,j}}{H_{i+1}}y_{i+1} = 0.$$

Для получения остальных уравнений нужно принять:

$$r_{i0} = r_{ik} = s_{n+1,\,j} = \varphi_{0j} = y_{n+1} = 0,$$

$$i = 1, 2, \ldots, n; \quad j = 1, 2, \ldots, k.$$

Уравнение поперечных сил для i-го этажа имеет вид:

$$6\sum_{j=1}^{k}\frac{s_{ij}}{H_i}(\varphi_{ij}+\varphi_{i-1,j})-12\sum_{j=1}^{k}\frac{s_{ij}}{H_i^2}y_i+\sum_{i=1}^{n}P_i=0; \qquad (2)$$

остальные уравнения получим, если примем $i=1, 2, \ldots, n$, $\varphi_{0j}=0$.

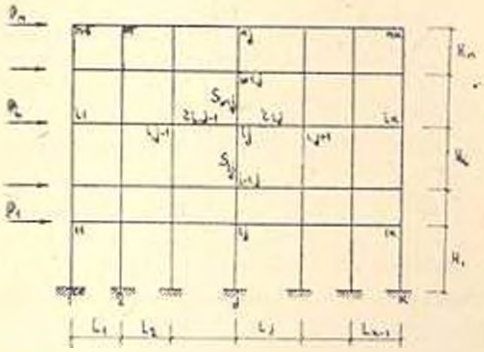

Рис. 1. Схема рамы.

Здесь s_{ij} — погонная жесткость j-ой стойки i-го этажа; r_{ij} — погонная жесткость j-го ригеля i-го этажа; φ_{ij} — угол поворота узла с координатами i и j; y — разность перемещений i-го и $(i-1)$-го этажей. Стержни рамы имеют прямоугольное сечение. В дальнейшем примем, что отношение высоты сечения стержня к его длине (γ) задано и в данном случае для всех элементов постоянно, следовательно, поперечное сечение каждого элемента характеризуется одним параметром. Имеем

$$s_{ij}=\frac{E_1^2}{12}H_iF_{ij}^{(3)}=\gamma H_iF_{ij}^{(3)}; \qquad r_{ij}=\frac{E_1^2}{12}L_jF_{ij}^{(3)}=\gamma L_jF_{ij}^{(3)}, \qquad (3)$$

где E — модуль упругости материала стержня; $F_{ij}^{(3)}$ — площадь поперечного сечения j-ой стойки i-го этажа; $F_{ij}^{(r)}$ — площадь поперечного сечения j-го ригеля i-го этажа.

Уравнения свободных колебаний получим, принимая

$$P_i=-m_i(y_1+y_2+\cdots+y_i)'', \qquad (4)$$

где m_i — масса, сосредоточенная в уровне i-го этажа; $(y_1+y_2+\cdots y_i)''$ — ускорение массы i-го этажа. При одночастотных колебаниях

$$\varphi_{ij}=\varphi_{ij}^*\sin\omega t; \qquad y_i=y_i^*\sin\omega t, \qquad (5)$$

где ω — круговая частота свободных колебаний; φ_{ij}^*, y_i^* — амплитудные значения соответствующего угла поворота и деформации этажа. Подставляя (3), (4) и (5) в (1) и (2), опуская звездочки при φ и y и умножая (2) на -1, получим:

$$\Phi_{ij} = 2H_i F^{(s)}_{ij}\varphi_{i-1,\,j} + 2L_{j-1}F^{(r)}_{i,\,j-1}\varphi_{i,\,j-1} + 4(H_i F^{(s)}_{ij} + L_{j-1}F^{(r)}_{i,\,j-1} +$$

$$+ L_j F^{(r)}_{ij} + H_{i+1}F^{(s)}_{i+1,\,j})\varphi_{ij} + 2L_j F^{(r)}_{ij}\varphi_{i,\,j+1} + 2H_{i+1}F^{(s)}_{i+1,\,j}\varphi_{i+1,\,j} -$$

$$- 6F^{(s)}_{ij}y_i - 6F^{(s)}_{i+1,\,j}y_{i+1} = 0; \qquad (6)$$

$$i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n;\quad j = 1,\ 2,\ \ldots,\ k;$$

$$\overline{\Phi}_i = -6\sum_{j=1}^{k} F^{(s)}_{ij}(\varphi_{ij} + \varphi_{i-1,\,j}) + 12\sum_{j=1}^{k}\frac{F^{(s)}_{ij}}{H_i}y_i -$$

$$- \sum_{i=1}^{n} m_i\frac{\omega^2}{g}(y_1 + y_2 + \cdots + y_i) = 0; \qquad (7)$$

$$i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

При поиске оптимальных параметров каркаса считаем $m_i = \text{const}$. Это допущение можно считать приемлемым, так как обычно собственная масса элементов каркаса мала по сравнению с внешней вертикальной нагрузкой. Геометрическая схема каркаса считается заданной.

Итак, задача формулируется следующим образом: требуется определить минимум объема рамы

$$V = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} F^{(s)}_{ij}H_i + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k-1} F^{(r)}_{ij}L_j$$

при условиях (6) и (7).

Задача решается применением множителей Лагранжа. Составляем функцию Лагранжа

$$Z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} F^{(s)}_{ij}H_i + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k-1} F^{(r)}_{ij}L_j + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\lambda_{ij}\Phi_{ij} + \sum_{i=1}^{n}\overline{\lambda}_i\overline{\Phi}_i, \qquad (8)$$

где λ_{ij}, $\overline{\lambda}_i$ — неизвестные множители Лагранжа. Из условия минимума функции Z имеем:

$$\frac{\partial Z}{\partial\varphi_{ij}} = 0; \quad \frac{\partial Z}{\partial y_i} = 0; \quad \frac{\partial Z}{\partial F^{(s)}_{ij}} = 0; \quad \frac{\partial Z}{\partial F^{(r)}_{ij}} = 0. \qquad (9)$$

Тогда получим

$$2H_i\lambda_{i-1,\,j}F^{(s)}_{ij} + 2L_{j-1}\lambda_{i,\,j-1}F^{(r)}_{i,\,j-1} + 4[H_i F^{(s)}_{ij} + L_{j-1}F^{(r)}_{i,\,j-1} +$$

$$+ L_j F^{(r)}_{ij} + H_{i-1}F^{(s)}_{i+1,\,j}]\lambda_{ij} + 2L_j\lambda_{i,\,j+1}F^{(r)}_{ij} +$$

$$+ 2H_{i+1}\lambda_{i+1,\,j}F^{(s)}_{i+1,\,j} - 6\overline{\lambda}_i F^{(s)}_{ij} - 6\overline{\lambda}_{i+1}F^{(s)}_{i+1,\,j} = 0; \qquad (10)$$

$$i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n;\quad j = 1,\ 2,\ \ldots,\ k;$$

$$-6\sum_{j=1}^{k} F^{(s)}_{ij}(\lambda_{ij} + \lambda_{i-1,\,j}) + 12\sum_{j=1}^{k}\frac{F^{(s)}_{ij}}{H_i}\overline{\lambda}_i - \sum_{i=1}^{n}\frac{\omega^2}{g}m_i(\overline{\lambda}_1 + \cdots + \overline{\lambda}_i) = 0; \qquad (11)$$

$$i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n;$$

$$H_i + \lambda_{ij}[2H_i\varphi_{i-1,j} + 4H_i\varphi_{ij} - 6y_i] + \lambda_{i-1,j}[2H_i\varphi_{ij} + 4H_i\varphi_{i-1,j} - 6y_i] + \\ + \bar{\lambda}_i\left|-6\varphi_{ij} - 6\varphi_{i-1,j} + 12\frac{y_i}{H_i}\right| = 0; \qquad (12)$$

$$i = 1, 2, \ldots, n; \quad j = 1, 2, \ldots, k;$$

$$L_j + \lambda_{ij}[4L_j\varphi_{ij} + 2L_j\varphi_{i,j+1}] + \lambda_{i,j+1}[2L_j\varphi_{ij} + 4L_j\varphi_{i,j+1}] = 0; \qquad (13)$$

$$i = 1, 2, \ldots, n, \quad j = 1, 2, \ldots, k-1.$$

Сравнение уравнений (10) и (11) с (6) и (7) показывает, что множители Лагранжа пропорциональны углам поворота и деформациям этажей, т. е.

$$\lambda_{ij} = \nu\varphi_{ij}; \qquad \bar{\lambda}_i = \nu y_i, \qquad (14)$$

где ν — коэффициент пропорциональности. Учитывая (14), из (12) и (13), получаем систему для определения φ_{ij}, y_i и ν:

$$4(\varphi_{ij}\varphi_{i-1,j} + \varphi_{ij}^2 + \varphi_{i-1,j}^2) + 12\left(-\varphi_{ij}\frac{y_i}{H_i} - \varphi_{i-1,j}\frac{y_i}{H_i} + \frac{y_i^2}{H_i^2}\right) = -\frac{1}{\nu},$$

$$i = 1, 2, \ldots, n; \quad j = 1, 2, \ldots, k;$$

$$4(\varphi_{ij}^2 + \varphi_{ij}\varphi_{i,j+1} + \varphi_{i,j+1}^2) = -\frac{1}{\nu}; \qquad (15)$$

$$i = 1, 2, \ldots, n; \quad j = 1, 2, \ldots, k-1.$$

В общем случае число неизвестных параметров деформирования меньше числа уравнений системы (15). Для получения единственного решения следует стремиться к тому, чтобы число неизвестных параметров деформирования φ_{ij} и y_i и число параметров поперечных сечений $F_{ij}^{(1)}$, $F_{ij}^{(2)}$ были равны. Этого можно достигнуть, приняв параметры «лишних» стержней заранее известными. В случае симметричной рамы, например, заранее можно принять, что размеры поперечных сечений симметричных стержней равны. Решая систему (15), найдем неизвестные параметры деформирования φ_{ij}, y_i ($i = 1, 2, \ldots, n$; $j = 1, 2, \ldots, k-1$). Подставляя эти значения в уравнения динамического равновесия (6) и (7), находим неизвестные размеры поперечных сечений

$F_{ij}^{(1)}$ ($i = 1, 2, \ldots, n$; $j = 1, 2, \ldots, k$). $F_{ij}^{(2)}$ ($i = 1, 2, \ldots, n$; $j = 1, 2, \ldots, k-1$).

Таким образом, задача решена.

Рассмотрим конкретный пример однопролетной многоэтажной рамы. Система (15) в данном случае будет иметь вид:

$$4\varphi_{i1}\varphi_{i-1,1}+4\varphi_{i1}^2+4\varphi_{i-1,1}^2-12\varphi_{i1}\frac{y_i}{H_i}-12\varphi_{i-1,1}\frac{y_i}{H_i}+12\frac{y_i^2}{H_i^2}=-\frac{1}{\nu},$$

$$4\varphi_{i2}\varphi_{i-1,2}+4\varphi_{i2}^2+4\varphi_{i-1,2}^2-12\varphi_{i2}\frac{y_i}{H_i}-12\varphi_{i-1,2}\frac{y_i}{H_i}+12\frac{y_i^2}{H_i^2}=-\frac{1}{\nu},\tag{16}$$

$$4\varphi_{i1}^2+4\varphi_{i1}\varphi_{i2}+4\varphi_{i2}^2=-\frac{1}{\nu},\qquad i=1,\ 2,\ \ldots.\ n.$$

Сравнение первых двух уравнений системы (16) показывает, что они будут удовлетворены, если принять

$$\varphi_{i1}=\varphi_{i2}=\varphi_i;\qquad \varphi_{i-1,1}=\varphi_{i-1,2}=\varphi_{i-1}.$$

Тогда

$$4\varphi_i\varphi_{i-1}+4\varphi_i^2+4\varphi_{i-1}^2-12\varphi_i\frac{y_i}{H_i}-12\varphi_{i-1}\frac{y_i}{H_i}+12\frac{y_i^2}{H_i^2}=-\frac{1}{\nu};\tag{17}$$

$$12\varphi_i^2=-\frac{1}{\nu};\qquad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Из второго уравнения (17) следует, что углы поворота всех узлов рамы равны, т. е. $\varphi_i=\varphi$. Исключая ν из (17), получим:

$$-8\varphi^2-12\varphi\frac{y_1}{H_1}+12\left(\frac{y_1}{H_1}\right)^2=0;$$

$$-12\varphi\frac{y_i}{H_i}-12\varphi\frac{y_i}{H_i}+12\left(\frac{y_i}{H_i}\right)^2=0;\qquad i=2,\ 3,\ \ldots,\ n.\tag{18}$$

Из первого уравнения (18) находим

$$\varphi=-\frac{3}{4}\frac{y_1}{H_1}\pm\sqrt{\frac{9}{16}\left(\frac{y_1}{H_1}\right)^2+\frac{3}{2}\left(\frac{y_1}{H_1}\right)^2}=-\frac{3}{4}\frac{y_1}{H_1}\left(1\pm\sqrt{\frac{11}{3}}\right).\tag{19}$$

Рассматривая деформированное состояние рамы при колебаниях по основному тону, можно убедиться, что при $y_1>0$ $\varphi>0$. Поэтому, при определении φ по формуле (19), перед корнем нужно взять знак минус. Тогда

$$\varphi=0{,}676\frac{y_1}{H_1}.\tag{20}$$

Из второго уравнения (18) получим:

$$\frac{y_i}{H_i}=1{,}352\frac{y_1}{H_1};\qquad i\geqslant 2.\tag{21}$$

Получилось, что углы поворота и все относительные деформации этажей, кроме первого, равны между собой. Стало быть, рама заданной частоты и минимального объема (массы) одновременно является и конструкцией равной деформации. Остается определить размеры поперечных сечений стержней, используя систему уравнений (6) и (7). Составляя уравнения типа (6) для данного случая, убеждаемся, что для узлов $i1$ и $i2$ они будут удовлетворены, если $F_{i1}^{(i)} = F_{i2}^{(i)} = F_i^{(i)}$. Подставляя значения φ и y_i в (6), получим:

$$-F_i^{(i)} H_i - F_{i+1}^{(i)} H_{i+1} + L F_i^{(i)} = 0; \qquad i \geqslant 2$$
$$-3{,}296 F_2^{(1)} H_1 - 4{,}056 F_2^{(1)} H_2 + 4{,}056 F_1^{(1)} L = 0. \tag{22}$$

Из уравнений (7) получим

$$16{,}224 F_i^{(i)} - \frac{\omega^2}{g} \sum_{i=1}^{n} m_i \left| H_1 + 1{,}352 (H_2 + \cdots + H_i) \right| = 0; \qquad i \geqslant 2,$$
$$15{,}888 F_1^{(1)} - \frac{\omega^2}{g} \sum_{i=1}^{n} m_i \left| H_1 + 1{,}352 (H_2 + \cdots + H_i) \right| = 0. \tag{23}$$

Размеры поперечных сечений стоек $F_i^{(i)}$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) сразу определяются из (23). Из (22) найдем неизвестные размеры поперечных сечений ригелей $F_i^{(i)}$ ($i = 1, 2, \ldots, n$). Вычислим параметры деформирования и размеры сечений стержней для пятиэтажной рамы при $m_1 = m_2 = \cdots = m$; $H_1 = H_2 = \cdots = H$. Оптимальные значения узловых моментов M (уменьшенных в $\frac{E_1 \varepsilon^2}{12} F_1^{(i)} y_1$ раз), нормальных напряжений σ (уменьшенных в $\frac{E_1}{2H} y_1$ раз) и параметров поперечных сечений ($F_i^{(i)}$, $F_i^{(i)}$) приведены в табл. 1. На рис. 2 приведена эпюра моментов оптимальной рамы, там же приведены оптимальные размеры сечений и форма колебаний рамы.

Приведенные данные показывают, что рама заданной частоты и минимального объема одновременно является и рамой равного сопротивления. Максимальные нормальные напряжения почти для всех стержней одинаковы.

Приведенное решение можно применить и в случае рамы с абсолютно жесткими ригелями. Уравнения динамического равновесия в этом случае будут иметь вид (7), где нужно принять $\varphi_{ij} = 0$. Окончательно получим:

$$y_i = y_1 \frac{H_i}{H_1} \quad (i = 1, 2, \ldots, n); \qquad F_i = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\omega^2}{g} (H_1 + H_2 + \cdots + H_i),$$

где $F_i = \sum_{j=1}^{k} F_{ij}^{(i)}$.

Таблица 1

Узловые сечения	$M\frac{12}{E_1 J_1^{(3)} y_3}$	$=\frac{2H}{E_1 y_3}$	$\frac{F_1^{(i)}}{F_1^{(3)}}$ или $\frac{F_i^{(i)}}{F_1^{(3)}}$
0—11	—4,648	—4,648	1
11— 0	—3,296	—3,296	
11—12	7,052	4,056	1,739
11—21	—3,756	—4,056	0,926
21—11	—3,756	—4,056	
21—22	7,009	4,056	1,728
21—31	—3,253	—4,056	0,802
31—21	—3,253	—4,056	
31—32	5,707	4,056	1,407
31—41	—2,454	—4,056	0,605
41—31	—2,454	—4,056	
41—42	3,829	4,056	0,944
41—51	—1,375	—4,056	0,339
51—41	—1,375	—4,056	
51—52	1,375	4,056	0,339

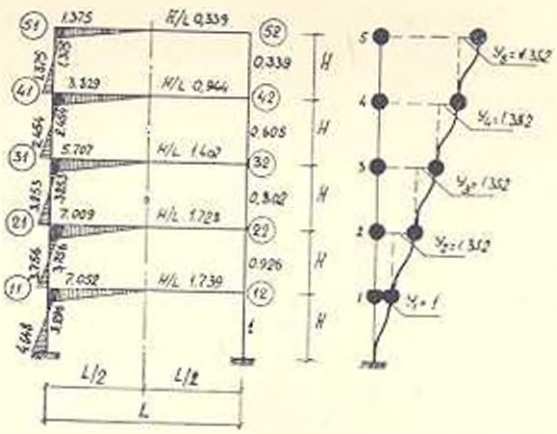

Рис. 2. Эпюра моментов оптимальной рамы (из-за ее симметричности показана только одна половина) и форма колебаний основного тона

В случае пятиэтажной рамы при $m_1 = m_2 = \cdots = m$; $H_1 = H_2 = \cdots = H$ имеем:

$$y_1 = y_2 = \cdots = y_5 = 1; \quad F_2/F_1 = 0{,}933; \quad F_3/F_1 = 0{,}80;$$

$$F_4/F_1 = 0{,}60; \quad F_5/F_1 = 0{,}333.$$

Если в оптимальной пятиэтажной раме с деформируемыми ригелями относительная деформация первого этажа была несколько меньше, чем в верхних этажах, то в данном случае деформации всех этажей одинаковы. Это можно объяснить тем, что в данном случае стойки всех эта-

жей имеют одинаковые граничные условия — подвижное или неподвижное защемление обоих концов.

Сравним значения объемов оптимальной рамы с абсолютно жесткими ригелями с такой же рамой, но со стойками постоянного сечения. Вычислим объем V для одной стойки. Для оптимальной рамы имеем

$$V_{\text{опт}} = \sum_{i=1}^{5} F_i H_i = 55 \frac{m\omega^2 H^4}{Eh^2},$$

где h — высота сечения.

Для вычисления объема рамы со стойками постоянного сечения воспользуемся результатами работы [9]. Основная частота пятиэтажного здания определяется выражением

$$\omega^2 = 0{,}08102 \frac{Ebh^3}{mH^3},$$

отсюда

$$F = bh = 12{,}34 \cdot \frac{mH^3\omega^2}{Eh^2},$$

где b — ширина сечения. Тогда

$$V = 5HF = 61{,}7 \cdot \frac{m\omega^2 H^4}{Eh^2}.$$

Получилось, что объем оптимальной рамы составляет $55 : 61{,}7 = 0{,}89$ от объема рамы со стойками постоянного сечения. Для десятиэтажной рамы с абсолютно жесткими ригелями это отношение равно 0,86.

АрмНИИ строительства и архитектуры

Поступило 6.V.1977.

Վ. Ա. ՀԱՄԲԱՐՁՈՒՄՅԱՆ

ՆՎԱԶԱԳՈՒՅՆ ԾԱՎԱԼԻ ՇՐՋԱՆԱԿԱՅԻՆ ԿՈՆՍՏՐՈՒԿՑԻԱՅԻ ՆԱԽԱԳԾՈՒՄԸ ՀԻՄՆԱԿԱՆ ՀԱՃԱԽՈՒԹՅԱՆ ՏՐՎԱԾ ԱՐԺԵՔԻ ԴԵՊՔՈՒՄ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Ուսումնասիրված է շրջանակային կոնստրուկցիայի ձողերի հատվածքների օպտիմալ չափերի ընտրության հարցը՝ հարմոնիկ, հորիզոնական տատանումների դեպքում։

Խնդիրը լուծված է Լագրանժի գործակիցների կիրառությամբ, օգտագործելով դեֆորմացիոն մեթոդի հավասարակշռության հավասարումները։ Ստացված է, որ նյութի օպտիմալ բաշխում ունեցող շրջանակը միաժամանակ հանդիսանում է հավասարամուր ձողեր ունեցող կոնստրուկցիա։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Амбарцумян В. А., Хачиян Э. Е.* К вопросу оптимального проектирования каркасных зданий на сейсмические воздействия. «Исследования по сейсмостойкости зданий повышенной этажности». Ереван, 1973.
2. *Тэрнер М.* Проектирование конструкций минимального объема, имеющих заданные собственные частоты. «Ракетная техника и космонавтика», том 5, № 10, 1967.
3. *Тейлор Дж.* Расчет стержня наименьшего веса при продольных колебаниях с заданными значениями собственной частоты. «Ракетная техника и космонавтика», том 5, № 10, 1967.
4. *Рубин С.* Проектирование сложных конструкций минимального веса при ограничениях, наложенных на величину собственной частоты. «Ракетная техника и космонавтика», № 5, 1970.
5. *Маккарт Б., Хо Э., Стритер Т.* Оптимальное проектирование конструкций при ограничениях, наложенных на собственную частоту. «Ракетная техника и космонавтика», № 6, 1970.
6. *Гринев В. Б., Филиппов А. П.* Оптимальное проектирование конструкций, имеющих заданные собственные частоты. «Прикладная механика», том VII, вып. 10, 1971.
7. *Рейтман М. И., Шапиро Г. С.* Методы оптимального проектирования деформируемых тел. М., 1976.
8. *Рабинович И. М.* Курс строительной механики, ч. II. М., 1954.
9. *Хачиян Э. Е.* Сейсмические воздействия на высотные здания и сооружения. Ереван, 1973.