ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Տեխնիկական գիտութ. սերիա XXX, № 5, 1977 Серия технических наук

ГИДРАВЛИКА

С. А. АНАНЯН, А. К. АНАНЯН

ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЭКСПЛУАТАЦИОННЫХ ЗАПАСОВ ПОДЗЕМНЫХ ВОД С УЧЕТОМ ИЗМЕНЕНИЯ ИХ КАЧЕСТВА ПОД ВЛИЯНИЕМ ПОВЕРХНОСТНЫХ ИСТОЧНИКОВ

В статье излагаются гидродинамические основы определения эксплуатационных запасов подземных вод и способов их рационального использования для различных нужд. Излагается также методика прогноза изменения качества подземных вод под влиянием поверхностных загрязняющих источников. К этим задачам можно отнести также гидродинамические методы расчета пополнения подземных вод в межгорных впадинах.

Перечисленные выше задачи решаются применительно к межгорным впадинам на примере Араратской равнины.

Араратская равнина в геологическом и гидрогеологическом отношениях является сравнительно хорошо изученной межгорной впадиной, которая в сельскохозяйственном отношении имеет большое значение. Этим и объясняется, что Арартская равнина исследовалась и исследуется многими организациями и специалистами, результаты этих исследований опубликованы [1, 2] или оформлены в виде отчетов, которыми мы широко пользовались при решении перечисленных выше задач. Учитывая это обстоятельство, в статье геологические и гидрогеологические вопросы освещаются мало, несмотря на то, что эти характеристики являются основой всех наших исследований.

Араратская равнина представляет собой горный артезианский бассейн и служит естественным резервуаром подземных вод, поступающих с обрамляющих ее гор. В результате тектонических процессов по всей ширине поймы р. Аракс образовался порог у горы Дагна, который подобно плотине преграждает сток за ее пределами. Подземные воды Араратской равнины формируются, в основном, в предгорной и нагорной частях бассейна и среднего течения р. Аракс. Глубинные воды транспортируются на равнину преимущественно по древней погребенной речной сети и геоструктурным понижениям, заполненным лавовыми породами. Подземное водохранилище Араратской равнины заполнено напорными и грунтовыми водами, которые, не имея свободного оттока за пределы этого водохранилища, почти полностью разгружаются в него.

Циркуляция подземных вод происходит, в основном, по базальтам, андезито-базальтам и другим лавовым и валуно-галечниковым породам, залегающим в нижних горизонтах четвертичного комплекса.

Поверху лавовых пород залегает рыхлообломочный комплекс с мощными глинистыми пластами, которые создают условия для образования напора подземных вод в толще четвертичного комплекса. На периферийных частях равнины, где мощность озерно-речного комплекса уменьшается и залегают грубообломочные грунты, наблюдается выход мощных родников. Подземные воды над озерными глинами образуют второй водоносный слой, который характеризуется весьма пестрым литологическим составом и невыдержанным направлением. Подземные воды первого и второго водоносных слоев гидравлически связаны. Перемешивание возможно через многочисленные забои вертикальных скважин, и, кроме того, свободная связь между водоносными слоями существует в периферийных зонах озерных глин. Верхний покровный слой Араратской равнины представлен, в основном, аллювиальными суглинистыми отложениями. Грунтовые воды залегают на глубине 0,5—3,0 м от поверхности земли. Напорные воды подземного слоя постоянно подпитывают грунтовые воды.

Из сказанного видно, что в гидрогеологическом отношении Араратская равнина представляет собой сложную систему гидравлически связанных между собой слоев: верхний покровный слой с напорным питанием грунтовых вод, нижний слабонапорный водоносный слой, отделенный от артезианского водоносного слоя озерными глинами. Гидрогеологическая особенность Араратской равнины заключается еще в том, что все поверхностные водоисточники, которые образовались на территории равнины и прилегающих к ней районов, гидравлически связаны с указанными выше водоносными слоями, что необходимо учитывать при расчетах эксплуатационных запасов. При расчете гидродинамическим методом эксплуатационных запасов подземных вод и при разработке способов их эксплуатации необходимо не только точно схематизировать сложные гидрогеологические условия местности, но и одновременно необходимо отъем воды произвести по режимам потребителей (орошения, водоснабжения и т. д.), не нарушая при этом естественных режимов родников и других водоисточников.

Сложность задачи заключается еще и в том, что при отъемах воды из подземного водохранилища нельзя допускать перемешивания сильно минерализованных вод покровного слоя на засоленных участках почвы с нижележащими водоносными слоями.

Принципы схематизации гидрогеологических условий местности, установления граничных и начальных условий, выбор типа водозаборных сооружений и рациональной схемы их размещения для создания математической модели Араратской равнины нами опубликованы в работах [3÷4]. Поэтому на этом мы не останавливаемся и переходим к математической формулировке задачи.

Для описания фильтрационных процессов в трех, между собой гидравлически связанных, водоносных слоях, будем пользоваться дифференциальными уравнениями фильтрации. Эти уравнения для нашей задачи можно представить в следующем виде:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\bar{h}\,\frac{\partial h}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\bar{h}\,\frac{\partial h}{\partial y}\right)+k_0\,\frac{H-h}{h-T}\pm q=\mu_0\,\frac{\partial h}{\partial t}; \qquad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k_1 m_1\,\frac{\partial H_1}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k_1 m_1\,\frac{\partial H_1}{\partial y}\right)-k_0\,\frac{H-h}{h-T}+$$

$$+k_3\,\frac{H_1-H_2}{m_2}=\mu_1\,\frac{\partial H}{\partial t}; \qquad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k_2 m_2\,\frac{\partial H_2}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k_2 m_2\,\frac{\partial H_2}{\partial y}\right)-k_3\,\frac{H_1-H_2}{m_3}=\mu_2\,\frac{\partial H_2}{\partial t}; \qquad (3)$$

$$T=m_1+m_2+m_3, \qquad (4)$$

где x, y — координаты точки; плоскость xOy совмещена с плоскостью водоупора; t — время; h — высота залегания уровня грунтовых вод в первом водоносном слое, считая от координатной плоскости; H_1 и H_2 — пьезометрические напоры в соответствующих водоносных слоях; k_0, k_1, k_2 — коэффициенты фильтрации соответствующих водоносных слоев; q — скорость инфильтрации или испарения в покровном слое; μ_0, μ_1 и μ_2 — коэффициенты водоотдачи и упругоемкости соответствующих водоносных слоев; m_1, m_2 и m_3 — мощности соответствующих водоносных слоев.

Начальные условия для уравнения (1) определяются высотой стояния уровня грунтовых вод, которые задаются в виде карты гидроизогипс. Начальные условия для напорных водоносных слоев (2) — (3) задаются в виде гидроизопьез (линия одинаковых напоров). Граничные условия для дифференциальных уравнений (1)—(3) определяются гидрогеологическими условиями местности (на основании геологической и геофизической разведки).

В условиях Араратской равнины в зависимости от гидрогеологических условий приняты граничные условия первого, второго и третьего рядов. Граничные условия первого ряда приняты на тех участках контура области фильтрации, где наблюдается поступление воды (при постоянном напоре) из области формирования в подземное водохранилище Араратской равнины, а также на местах выхода родников или других водоисточников, включая реки и водоемы, которые гидравлически связаны с водоносными слоями. Граничные условия второго ряда приняты на тех участках контура области фильтрации, где практически не наблюдается поступление воды из области формирования в Араратскую равнину (безводные участки). Граничные условия третьего ряда приняты на участках конуса выноса речных долин.

Дифференциальные уравнения (1) — (3) нами решаются конечно-разностным методом с переменными коэффициентами на трех универсальных сеточных моделях (УСМ-1), работающих в параллельном режиме с цифровой машиной Наири-2. Принципиальная электрическая блок-схема расчета приведена в [3,5]. Сопротивления R_x, R_y, R_z блок-схемы определяются из аналогии, которая существует между уравчениями фильтрации и Кирхгофа для электрического поля. Правые части (нестационарные члены) дифференциальных уравнений (1)—(3) моделируются временным сопротивлением R_t по методу Либмана [6].

После каждого шага по времени значение потенциала на свободных концах временных сопротивлений задается из карты гидропьезоизогипс, которая получена по расчету в предыдущих моментах времени. Инфильтрационные процессы в верхнем покровном слое и расходы водозаборных сооружений моделируются силой тока по аналогии, существующей между фильтрацией и силой тока по законам Ома и Дарси. Более подробное описание методики решения дифференциальных уравнений фильтрации в двухслойной фильтрирующей среде приведено в [3].

В результате решения дифференциальных уравнений (1) — (3) получаем значения напоров после каждого шага по времени в соответствующих точках области фильтрации.

По полученным картам гидроизогипс нетрудно определить эксплуатационные запасы подземных вод и скорости фильтрации.

Эксплуатационные запасы подземных вод по известным значениям напоров, полученным при определенной схеме расположения скважин и определенном режиме их работы, оцениваются следующим образом.

Задается высота стояния уровня грунтовых вод, т. е. глубина осушения, считая от поверхности почвы, выше которой их подъем не допускается. Например, на рассоленных землях Араратской равнины эта высота принята равной 3 *м*, исходя из условия недопущения вторичных процессов засоления. Естественная высота стояния уровня грунтовых вод в условиях Араратской равнины в среднем достигает 2 *м*.

Уровень грунтовых вод снижается при откачках и наоборот—повышается (восстанавливается) при их частичном или полном прекращении. Закономерность снижения и повышения уровня грунтовых вод определяется по картам гидроизогипс для каждого периода времени в отдельности. Небольшая высота снижения уровня грунтовых вод (или продолжительность откачки) определяется высотой, при которой по прекращению откачки начинается подъем уровня грунтовых вод, и в течение определенного времени их уровень достигает начальной глубины осушения. Разумеется, суммарное время откачки и восстановления должны равняться годовому периоду времени. Только при этих условиях процесс сработки и наполнения определенной емкости подземного резервуара из года в год может происходить по периодическому закону (т. е. не произойдет истощения запасов подземных вод).

Из сказанного видно, что эксплуатационные запасы подземных вод определяются объемом воды, который после частичного или полного прекращения работы скважин поступает из области формирования в область отъема в течение времени, необходимого для подъема уровня воды до отметки осушения.

Условия непрерывного поступления подземных вод из области формирования в область отбора математически сформулированы в граничных и начальных условиях задачи.

На рис. 1. приведены результаты расчетов, выполненные по описанному выше методу на площади 17 тыс. га Октемберянского района, при работе 250 скважин по определенному режиму и определенной схеме их расположения; на рис. 1 ступенчатым графиком показан режим отбора (расход, время и число одновременно работающих скважин).

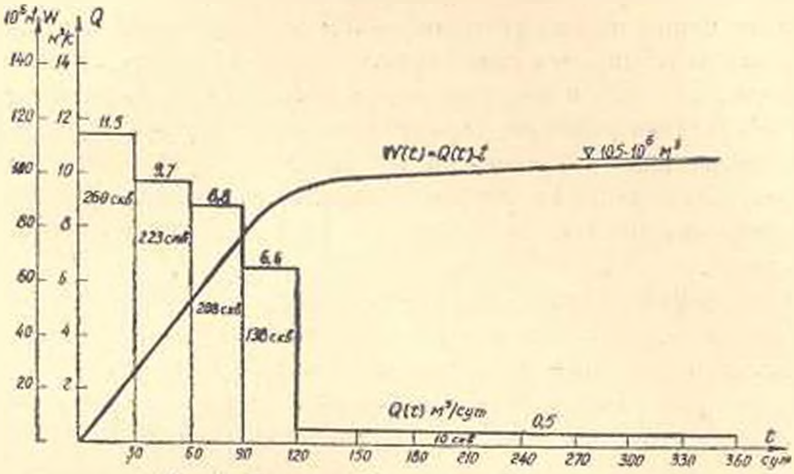

Рис. 1. Подземный сток и график откачки.

Непрерывной кривой показан сток подземных вод. Из кривой стока видно, что эксплуатационный запас подземных вод на площади 17 тыс. га равняется 105 мл. $м^3$ в год. Этот объем является дополнительным источником воды для орошения.

По изложенному методу можно разрешить и другие задачи. Например, задаваясь различными схемами и режимами работы скважин, можно определить более экономичные варианты водозаборных сооружений.

При помощи дифференциальных уравнений (1) — (3) методом математического моделирования можно разрешить также вопросы динамики подземных вод при пополнении динамических запасов. В зависимости от принятой схемы пополнения нетрудно математически сформулировать начальные и граничные условия решения дифференциальных уравнений (1) — (3).

Вторая задача, которая связана с проблемой сохранения качества или защиты подземных вод от загрязнения поверхностными источниками, в настоящее время приобретает большое практическое значение. В частности, будем рассматривать задачу изменения минерализации подземных вод в различных водоносных слоях при капитальных промывках засоленных земель в покровном слое.

Как известно, капитальные промывки засоленных земель обычно производятся оросительной водой. Эта вода, просачиваясь в толщу почвогрунта из отдельных чеков*, по пути движения растворяет соли. Раст-

* Чеки—это небольшие обвалованные участки поля, которые при орошении наполняются водой (глубиной от 20 до 30 *см*) в течение всего процесса промывки.

воренные соли при инфильтрационных процессах перемешиваются с нижними водоносными слоями, а затем дренажными устройствами перехватываются и подаются на поверхность земли. Как было сказано выше, при установлении эксплуатационных запасов подземных вод отъем (откачку) необходимо произвести таким образом, чтобы качество воды в водоносных слоях чувствительно не изменялось.

Вторая задача, связанная с проблемой загрязнения подземных вод, поступающих с поверхностных слоев засоленной почвы в более глубокие слои при капитальных промывках, на фоне вертикального дренажа решается при помощи дифференциальных уравнений массопереноса. Для решения этой задачи пространственную задачу массопереноса приближенно заменяем планово-пространственной задачей. Перенос солей только в вертикальном направлении приближенно описывается дифференциальным уравнением физико-химической гидродинамики [7]:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(D\frac{\partial c}{\partial z}\right)-\frac{\partial(vC)}{\partial z}+\beta(C_н-C)=n\frac{\partial c}{\partial t}. \tag{5}$$

Для уравнения (5) принимаем следующие начальные и граничные условия:

при $t=0$

$$C=\varphi(z); \tag{6}$$

при $t>0$

$$z=0;\quad D\frac{\partial C}{\partial z}=v(C_0-C);\qquad z=T;\quad \frac{\partial C}{\partial z}=0. \tag{7}$$

Плановая задача массопереноса в двухслойной фильтрирующей среде может быть представлена в следующем виде:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(D\frac{\partial C_1}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(D\frac{\partial C_1}{\partial y}\right)-\frac{\partial(v_xC_1)}{\partial x}-\frac{\partial(v_yC_1)}{\partial y}+$$

$$+v_z\frac{C_1^{I}-C_1^{II}}{m}+\beta(C_н-C)=n_1\frac{\partial C_1}{\partial t}; \tag{8}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(D\frac{\partial C_2}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(D\frac{\partial C_2}{\partial y}\right)-\frac{\partial(v_xC_2)}{\partial x}-\frac{\partial(v_yC_2)}{\partial y}-$$

$$-v_zD\frac{C_1^{I}-C_1^{II}}{m}=n_2\frac{\partial C_2}{\partial t}. \tag{9}$$

Дифференциальные уравнения (8) и (9) решаем при следующих начальных и граничных условиях:

при $t=0$

$$C_1=\varphi_1(x,\ y);\qquad C_2=\varphi_2(x,\ y); \tag{10}$$

при $t>0$ на контуре

$$C_1=C_2=C^{\circ}. \tag{11}$$

В уравнениях (5) ÷ (11) приняты следующие обозначения:

$C_н$ — концентрация предельного насыщения;

$C(z, t)$ — концентрация грунтовых вод в любой точке по глубине;

$C_1(x, y, t)$ и $C_2(x, y, t)$ — осредненные по высоте значения концентрации грунтовых вод в покровном и подстилающем водоносном слоях;

v_x, v_y и v_z — скорость фильтрации по направлению осей координат;

$D(x, y)$ и n — коэффициент конвективной диффузии и пористости в соответствующих водоносных слоях;

β — коэффициент скорости растворения;

m — мощность водоносного слоя в покровной толще (глубина воды в покровной толще, считая от подошвы покровного слоя).

Сопряжение осредненных значений функций $C_1(x, y, t)$ и $C_2(x, y, t)$ контактной плоскости двух водоносных слоев осуществляется некоторой непрерывной кривой для соблюдения условия непрерывности процесса массопереноса.

Решение планово-пространственной задачи массопереноса осуществляется в следующей последовательности:

1) Решаем дифференциальное уравнение (5). Результаты решения представлены в виде семейства кривых $C(z, t)$ (рис. 2).

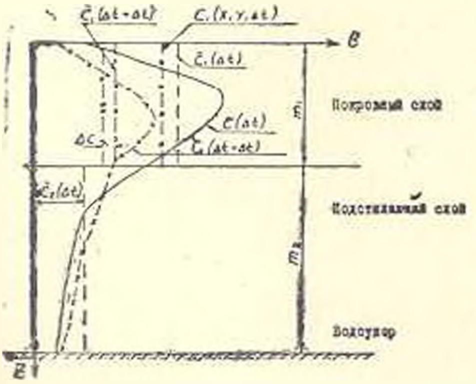

Рис. 2. Схематизация профильной задачи для формулировки начальных условий.

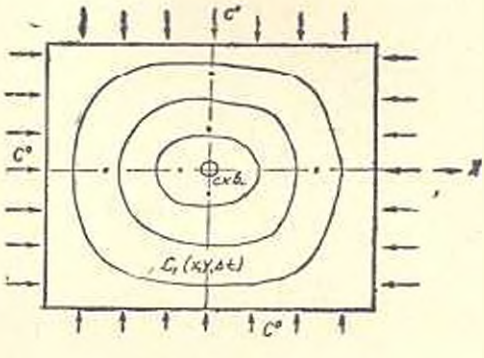

Рис. 3. Схематизация начальных условий планово-пространственной задачи.

2) Осредняем $\overline{C}(z, \Delta t)$ по высоте (разные в различных зонах фильтрации). На рис. 2 эти эпюры показаны пунктирными линиями.

3) Осредненные по высоте концентрации $\overline{C}_1(\Delta t)$ и $\overline{C}_2(\Delta t)$ принимаем в качестве начальных условий для решения первого шага по времени плановой задачи массопереноса. Граничные условия для дифференциальных уравнений (8) и (9) могут быть приняты любые.

4) Результаты решения системы дифференциальных уравнений (8) и (9) представляем в виде изолиний одинаковой концентрации для верхнего и нижнего водоносных слоев в отдельности (рис. 3).

5) Полученные из плановой задачи значения концентраций $C_1(x, y, \Delta t)$ и $C_2(x, y, \Delta t)$ наносим на рис. 2 (пунктир с точкой).

Разумеется, что значения $C_1(x, y, \Delta t)$ и $C_2(x, y, \Delta t)$, полученные из решения плановой задачи, будут несколько меньше заданных (начальных) значений $\overline{C}_1(\Delta t)$ и $\overline{C}_2(\Delta t)$. Это так и должно быть, ибо из контура области фильтрации поступает вода с меньшей концентрацией.

Ординаты осредненной эпюры концентраций $\overline{C}_1(\Delta t + \Delta t)$ и $\overline{C}_2(\Delta t + \Delta t)$, полученные после второго шага по времени решения профильной задачи, уменьшаем на величину, равную

$$\Delta C = [\overline{C}_1(\Delta t + \Delta t) - [\overline{C}(\Delta t) - C_1(x, y, \Delta t)]], \qquad (12)$$

где $\overline{C}(\Delta t)$ — ордината осредненной эпюры концентрации, полученной из решения профильной задачи после первого шага по времени; $C_1(x, y, \Delta t)$ — ордината эпюры концентрации, полученная из решения плановой задачи после первого шага по времени при начальном условии $\overline{C}_1(\Delta t)$.

Новое значение концентрации, равное $[\overline{C}(\Delta + \Delta t) - \Delta C]$, принимаем в качестве начального условия для решения плановой задачи для второго шага по времени.

Аналогичным образом расчеты продолжаем для $i\Delta t$-го шага по времени. Процесс можно считать завершенным тогда, когда концентрация грунтовых вод в верхнем водоносном слое достигнет допустимого предела.

Необходимо отметить, что при принятой схеме решения профильной задачи полученные результаты после каждого шага по времени не корректируются; т. е. не вносятся поправки после решения в соответствующем шаге по времени плановой задачи.

Надо предполагать, что это допущение — неучет обратной связи между плановой и профильной задачами — не может чувствительно отразиться на общие результаты расчетов. Во всяком случае, то упрощение, которое получается заменой решения весьма сложной пространственной задачи решением планово-пространственной задачи, в практическом отношении более целесообразно.

Дифференциальные уравнения массопереноса с соответствующими начальными и граничными условиями решаем на универсальной сеточной модели машины УСМ-1, работающей в параллельном режиме с цифровой машины Наири-2. Аналогом концентрации подземных вод C в фильтрационном потоке является потенциал U в электрическом поле.

Аналогом расхода солей в фильтрационном потоке является сила тока в электрическом поле. Используя эту аналогию, из дифференциального уравнения массопереноса и уравнения плотности электрического тока (закон Кирхгофа) нетрудно получить соответственно гидравлические и электрические сопротивления для составления электрической блок-схемы расчета.

Конечно-разностное выражение дифференциального уравнения (5) после преобразований можно представить в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{C_1 - C_2}{\Phi_1} + \frac{C_3 - C_2}{\Phi_2} + \frac{\overline{C}_3 - C_1}{\Phi_3} + \frac{C_2^k - C_2}{\Phi_4} + \frac{C_н - C_2}{\Phi_5} = \frac{C_2^t - C_2^{t-\Delta t}}{\Phi_t};\\
&\frac{C_2 - C_3}{\Phi_2} + \frac{C_4 - C_3}{\Phi_6} + \frac{\overline{C}_4 - C_2}{\Phi_7} + \frac{C_3^k - C_3}{\Phi_8} + \frac{C_н - C_3}{\Phi_5} = \frac{C_3^t - C_3^{t-\Delta t}}{\Phi_t};\\
&\frac{C_3 - C_4}{\Phi_6} + \frac{C_5 - C_4}{\Phi_9} + \frac{\overline{C}_5 - C_4}{\Phi_{10}} + \frac{C_4^k - C_4}{\Phi_{11}} + \frac{C_н - C_4}{\Phi_5} = \frac{C_4^t - C_4^{t-\Delta t}}{\Phi_t};\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \quad (13)$$

где

$$\Phi_1 = \frac{\Delta z^2}{D\left(\frac{\Delta z}{2}\right)\Delta x\Delta y}; \qquad \Phi_2 = \frac{\Delta z^2}{D\left(\frac{3}{2}\Delta z\right)\Delta x\Delta y};$$

$$\Phi_3 = \frac{2\Delta z}{\left.\left(\frac{\partial D}{\partial z} - v\right)\right|_{z=z_2}\Delta x\Delta y}; \qquad \Phi_4 = \frac{1}{\left.\frac{\partial v}{\partial z}\right|_{z=z_2}\Delta x\Delta y};$$

$$\Phi_5 = \frac{1}{3\Delta x\Delta y}; \qquad \Phi_t = \frac{\Delta t}{n\Delta x\Delta y}; \qquad \Phi_6 = \frac{\Delta z^2}{D\left(\frac{5}{2}\Delta z\right)\Delta x\Delta y};$$

$$\Phi_7 = \frac{2\Delta z}{\left(\frac{\partial D}{\partial z} - v\right)_{z=z_3}\Delta x\Delta y}; \qquad \Phi_8 = \frac{1}{\left.\frac{\partial v}{\partial z}\right|_{z=z_3}\Delta x\Delta y};$$

$$\Phi_9 = \frac{\Delta z^2}{D\left(\frac{7}{2}\Delta z\right)\Delta x\Delta y}; \qquad \Phi_{10} = \frac{2\Delta z}{\left(\frac{\partial D}{\partial z} - v\right)_{z=z_4}\Delta x\Delta y};$$

$$\Phi_{11} = \frac{1}{\left.\frac{\partial v}{\partial z}\right|_{z=z_4}\Delta x\Delta y};$$

при $\frac{\partial D}{\partial z} - v > 0 \quad \overline{C}_3 = C_3$; при $\frac{\partial D}{\partial z} - v < 0 \quad \overline{C}_3 = 2C_1 - C_3$.

Аналогичным образом можно составить конечно-разностные уравнения для остальных узловых точек сетки. Нетрудно заметить, что при этом число неизвестных будет равняться числу уравнений, куда входят также известные значения искомой функции или ее производных на верхней и нижней точках сетки. В правые части этих уравнений входят также извесные значения искомой функции (в любой узловой точке сетки) в момент времени $t - i\Delta t$. Например, для первого шага по времени значение $C^{t-\Delta t}$ определяется из начальной эпюры распределения функции $C(z, 0)$. Для второго шага расчета значение $C^{t-2\Delta t}$ определяется (берется) из первого шага расчета и т. д.

При расчетах заданными величинами являются вертикальные скорости (v), коэффициент конвективной диффузии (D), концентрация предельного насыщения ($C_н$), коэффициенты скорости растворения (β) и пористости грунта (n). Из конечно-разностных уравнений нетрудно также заметить, что условно обозначенная функция C^k будет равняться нулю, если $v > 0$. Если $v < 0$, то значение C^k необходимо взять равным $2C_i$ (i — значение искомой функции в соответствующих точках сетки).

Используя аналогию, которая существует между изменением концентрации жидкости в фильтрационном потоке и изменением потенциала в электрическом поле, из уравнения Кирхгофа, написанного для каждой узловой точки сетки аналогично конечно-разностным уравнениям массопереноса (12), нетрудно получить расчетные зависимости для электрических сопротивлений:

$$
\begin{gathered}
R_1 = \alpha_R \Phi_1; \quad R_2 = \alpha_R \Phi_2; \quad R_3 = \alpha_R \Phi_3; \quad R_4 = \alpha_R \Phi_4; \\
R_5 = \alpha_R \Phi_5; \quad R_t = \alpha_R \Phi_t .
\end{gathered} \tag{14}
$$

Значения Φ_1, Φ_2, Φ_3, Φ_4, Φ_5 и Φ_t приведены выше.

Принципиальная электрическая блок-схема расчета приведена на рис. 4. Из изложенного видно, что задача решается методом итерации.

Число дополнительных сопротивлений, подключенных в каждом узле блок-схемы (рис. 4), можно несколько уменьшить, если задача будет решаться по следующей методике [8, 9].

Представим конечно-разностные уравнения массопереноса в следующем виде:

$$
\left.
\begin{aligned}
&\frac{C_1 - C_2}{\Phi_1} + \frac{C_3 - C_2}{\Phi_2} = \frac{C_2^t - [C_2]^{t-\Delta t}}{\Phi_t}; \\
&\frac{C_2 - C_3}{\Phi_2} + \frac{C_4 - C_3}{\Phi_3} = \frac{C_3^t - [C_3]^{t-\Delta t}}{\Phi_t}; \\
&\frac{C_3 - C_4}{\Phi_3} + \frac{C_5 - C_4}{\Phi_4} = \frac{C_4^t - [C_4]^{t-\Delta t}}{\Phi_t}; \\
&[C_2]^{t-\Delta t} = C^{t-\Delta t} + \left[\left(\frac{\partial D}{\partial z} - v \right) \Bigg|_{z=z_2} \frac{C_3 - C_1}{2\Delta z} - C_2 \frac{\partial v}{\partial z} \Bigg|_{z=z_2} + \right. \\
&\qquad\qquad \left. + \beta (C_н - C_2) \right] \frac{\Delta t}{n}; \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}
\right\} \tag{15}
$$

где

$$\Phi_1 = \frac{\Delta z^2}{D\left(\frac{\Delta z}{2}\right)\Delta x \Delta y}; \qquad \Phi_2 = \frac{\Delta z^2}{D\left(\frac{3}{2}\Delta z\right)\Delta x \Delta y};$$

$$\Phi_3 = \frac{\Delta z^2}{D\left(\frac{5}{2}\Delta z\right)\Delta z \Delta y}; \qquad \Phi_t = \frac{\Delta t}{n \Delta x \Delta y}. \tag{16}$$

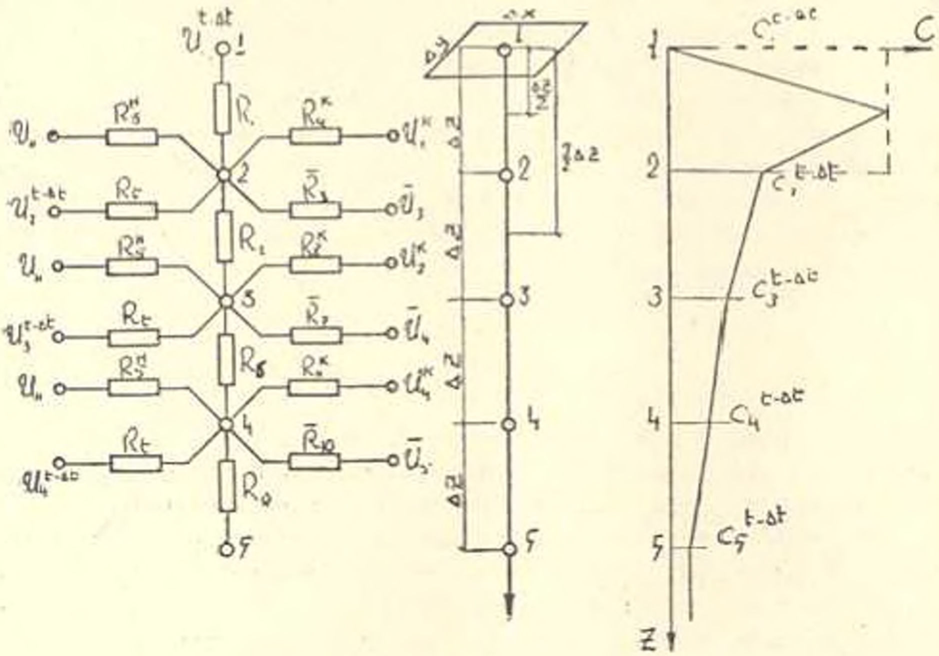

Рис. 4. Блок-схема профильной задачи по уравнениям (13).

Принципиальная электрическая блок-схема расчета для решения конечно-разностных уравнений (15) представлена на рис. 5. Из этой блок-схемы видно, что задача по второй методике также решается методом итерации, но число дополнительных сопротивлений, подключенных в каждом узле, уменьшается вдвое. Второй метод решения более универсальный.

При постоянных значениях коэффициента конвективной диффузии (D) и скоростей (V) конечно-разностное уравнение массопереноса удобно представить в следующем виде:

$$
\left.
\begin{aligned}
&\frac{C_1 - C_2}{\Phi_1} + \frac{C_3 - C_2}{\Phi_2} + \frac{C_н - C_2}{\Phi_3} = \frac{C_2^t - C_2^{t-\Delta t}}{\Phi_t};\\
&\frac{C_2 - C_3}{\Phi_1} + \frac{C_4 - C_3}{\Phi_2} + \frac{C_н - C_3}{\Phi_3} = \frac{C_3^t - C_3^{t-\Delta t}}{\Phi_t};\\
&\frac{C_3 - C_4}{\Phi_1} + \frac{C_5 - C_4}{\Phi_2} + \frac{C_н - C_4}{\Phi_3} = \frac{C_4^t - C_4^{t-\Delta t}}{\Phi_t};\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}
\right\} \qquad (17)
$$

где

$$
\Phi_1 = \frac{1}{\dfrac{\Delta z}{D\Delta x\Delta y} + \dfrac{2}{v\Delta x\Delta y}}; \qquad \Phi_2 = \frac{1}{\dfrac{\Delta z}{D\Delta x\Delta y} - \dfrac{2}{v\Delta x\Delta y}};
$$

$$
\Phi_3 = \frac{1}{\beta\Delta x\Delta y\Delta z}; \qquad \Phi_t = \frac{\Delta t}{n\Delta x\Delta y\Delta z}.
$$

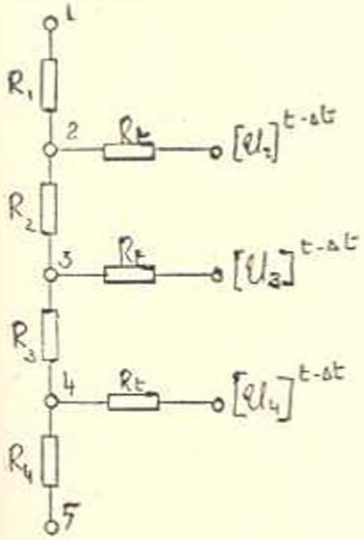

Рис. 5. Блок-схема профильной задачи по уравнениям (15).

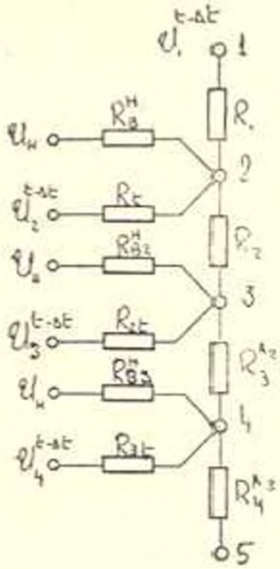

Рис. 6. Блок-схема профильной задачи по уравнениям (19).

Для составления электрической блок-схемы расчета необходимо, чтобы сопротивление от узла *2* к узлу *3* равнялось сопротивлению от узла *3* к узлу *2*. Эти условия должны быть удовлетворены для любого узла сетки, т. е. от узла (n — 1) к узлу n и от узла n к узлу n — 1. Конечно, все сказанное не относится к дополнительным сопротивлениям, подключенным в каждом узле сетки и моделирующим процессы растворения и нестационарности.

Чтобы преодолеть указанные выше трудности [11], достаточно все члены конечно-разностных уравнении помножить на некоторую постоянную величину, значение которой для каждой строки системы уравнений (17) определяется формулой

$$k_n = \left(\frac{\Phi_1}{\Phi_2}\right)^{n-1}, \quad (n = 1,\ 2,\ 3 \ldots) \tag{18}$$

где n — номера строк конечно-разностных уравнений (17).

После осуществления этих преобразований получим расчетные формулы сопротивлений для любого узла сетки электрической блок-схемы с одновременно удовлетворяющимися условиями одинаковости гидравлических (Φ) или электрических (R) сопротивлений между узлами $n-1-n$, $n-1-n$

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{C_1 - C_2}{\Phi_1} + \dfrac{C_3 - C_2}{\Phi_2} + \dfrac{C_n - C_2}{\Phi_3} = \dfrac{C_2^t - C_2^{t-\Delta t}}{\Phi_t}; \\[2ex]
\dfrac{C_2 - C_3}{\Phi_2} + \dfrac{C_4 - C_3}{A_2} + \dfrac{C_n - C_3}{B_2} = \dfrac{C_3^t - C_3^{t-\Delta t}}{\Phi_{2t}}; \\[2ex]
\dfrac{C_3 - C_4}{A_2} + \dfrac{C_5 - C_4}{A_3} + \dfrac{C_n - C_4}{B_3} = \dfrac{C_4^t - C_4^{t-\Delta t}}{\Phi_{3t}}; \\[2ex]
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{array}\right| \tag{19}$$

где

$$\begin{gathered}
A_n = \frac{\Phi_2^n}{\Phi_1^{n-1}}; \qquad B_n = \Phi_n\left(\frac{\Phi_2}{\Phi_1}\right)^{n-1}; \qquad \Phi_{nt} = \Phi_t\left(\frac{\Phi_2}{\Phi_1}\right)^{n-1}; \\
R_n^A = z_R A_n; \qquad R_n^B = z_R B_n; \qquad R_{nt} = z_R \Phi_{nt}.
\end{gathered} \tag{20}$$

Из изложенного нетрудно заметить, что решение дифференциального уравнения (5) с постоянными коэффициентами D, V, β, n при любых начальных и граничных условиях на универсальной сеточной модели решается без итерации.

Для иллюстрации реализации изложенного выше метода решим один частный пример при следующих исходных данных:

$$v = 0{,}03\ \frac{м}{сут}; \qquad D = 0{,}075\ \frac{м^2}{сут}; \qquad \beta = 0{,}018\ \frac{1}{сут};$$

$$n = 0{,}4; \quad \Delta z = 0{,}5\ м; \quad \Delta x = \Delta y = 100\ м; \quad \Delta t = 10\ сут.$$

На рис. 6 приведена электрическая блок-схема расчета. Численные значения сопротивления подсчитаны по формулам (20). Результаты расчетов приведены в табл. 1 и на рис. 7, где на координатной системе C—Z представлены изменения концентрации подземных вод по глубине после определенного шага Δt расчета по времени.

Таблица 1

Узлы, i	R_i^A	R^*_{Bi}	R_{ii}	Узлы, i	R_i^A	R^*_{Bi}	R_{ii}
1—2	30,5	250,0	500,0	8—9	119,0	975,8	1951,6
2—3	37,0	303,7	607,4	9—10	144,6	1185,4	2370,7
3—4	45,0	368,9	737,8	10—11	175,6	1439,9	2879,8
4—5	54,7	448,1	896,3	11—12	213,4	1749,1	3493,3
5—6	66,4	544,4	1088,7	12—13	259,3	2124,8	4249,5
6—7	80,4	661,3	1322,5	13—14	314,4	2581,1	5132,1
7—8	98,0	803,3	1606,6				

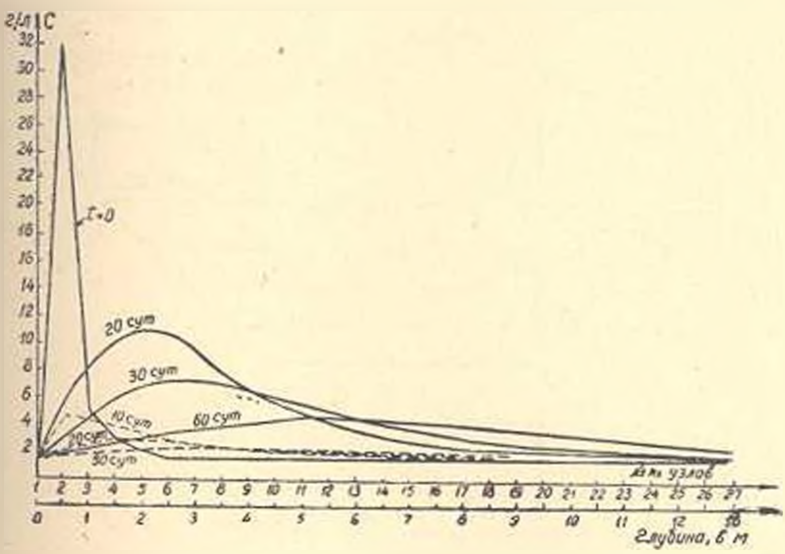

Рис. 7. Кривые $C(z, t)$, полученные из уравнения (5):
——— при $\beta = 0{,}018$ 1/*сут*; - - - - при $\beta = 0$.

При расчете принято, что подача воды с поверхности земли в грунт с концентрацией $C_0 = 1{,}5$ *г/л* осуществляется с постоянной интенсивностью, т. е. капитальная промывка засоленных земель производится непрерывно.

В заключение решения профильной задачи отметим, что в дифференциальных уравнениях массопереноса слабым местом является член, выражающий процесс растворения солей. В литературе в последнее время появился ряд предложений по этому вопросу.

Изложенная методика позволяет реализовать решение дифференциальных уравнений массопереноса при любых законах процесса растворения и обсорции. Для этого целесообразно в узловые точки электрической блок-схемы подавать ток (с соответствующим знаком) пропорционально солевому расходу растворения.

Перейдем к методике решения задачи массопереноса в двухслойной фильтрующей среде на фоне вертикального дренажа на сеточной модели УСМ-1 [11].

Будем считать, что значения скоростей определены из системы дифференциальных уравнений фильтрации по изложенной выше методике. Будем считать также, что заданы коэффициенты конвективной диффузии скоростей растворения, пористости грунтов и мощности соответствующих водоносных слоев.

Рис. 8. Блок-схема расчета пространственной задачи массопереноса.

Дифференциальные уравнения (8) и (9) в конечно-разностном виде, например, для узлов 1; 2; 3 и 4 сетки, (рис. 9) можно представить в следующем виде:

$$\frac{C_2 - C_1}{\dfrac{1}{D(-\Delta x,\ y_1)\dfrac{\Delta x}{\Delta y}}} + \frac{C_3 - C_1}{\dfrac{1}{D(\Delta x,\ y)\dfrac{\Delta x}{\Delta y}}} + \frac{C_4 - C_1}{\dfrac{1}{D(-\Delta y,\ x_1)\dfrac{\Delta y}{\Delta x}}} +$$

$$+ \frac{C_5 - C_1}{\dfrac{1}{D(\Delta y,\ x_1)\dfrac{\Delta y}{\Delta x}}} + \frac{C_6 - C_1}{\dfrac{1}{\beta \Delta x \Delta y}} + \frac{0 - C_1}{\dfrac{1}{\left(\dfrac{\partial v_x}{\partial x} + \dfrac{\partial v_y}{\partial y}\right)\Big|_{x_1,\, y_1} \Delta x \Delta y}} + \tag{21}$$

$$+ \frac{C_1^{\mathrm{I}} - C_1^{\mathrm{II}}}{\dfrac{m}{v_z \Delta x \Delta y}} = \frac{C_1^{t} - C_1^{t-\Delta t}}{\dfrac{\Delta t}{n \Delta x \Delta x}};$$

. . . .

Конечно-разностные уравнения для моделирования массопереноса удобно представить в таком виде, как обычно записывается уравнение Кирхгофа для плотностей электрического поля, т. е.

$$\frac{C_2 - C_1}{\Phi_1} + \frac{C_3 - C_1}{\Phi_2} + \frac{C_4 - C_1}{\Phi_3} + \frac{C_5 - C_1}{\Phi_4} + \frac{\overline{C}_n - C_1}{\Phi_n} +$$

$$+ \frac{C_1^{\mathrm{I}} - C_1^{\mathrm{II}}}{\Phi_z} = \frac{C_1^{t} - C_1^{t-\Delta t}}{\Phi_t} \tag{22}$$

. . . .

где

$$\Phi_1 = \frac{1}{D(-\Delta x,\ y_1)\dfrac{\Delta x}{\Delta y}}; \qquad \Phi_2 = \frac{1}{D(\Delta x,\ y_1)\dfrac{\Delta x}{\Delta y}};$$

$$\Phi_3 = \frac{1}{D(-\Delta y,\ x_1)\dfrac{\Delta y}{\Delta x}}; \qquad \Phi_4 = \frac{1}{D(\Delta y,\ x_1)\dfrac{\Delta y}{\Delta x}};$$

$$\Phi_n = \frac{1}{(A + \beta)\Delta x \Delta y}; \qquad \overline{C}_n = \frac{\beta C_n}{A + \beta}; \qquad A = \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}\right)_{x,\, y}; \tag{23}$$

$$\Phi_z = \frac{m}{v_z \Delta x \Delta y}; \qquad \Phi_t = \frac{\Delta t}{n \Delta x \Delta y}.$$

Необходимо отметить, что в процессах массопереноса гидравлическая связь между двумя водоносными слоями в приведенных выше уравнениях описывается выражением

$$\frac{C_1^{\mathrm{I}} - C_1^{\mathrm{II}}}{\Phi_z}, \tag{24}$$

где C_1^{I} и C_1^{II} — концентрации грунтовых вод в соответствующих точках верхней и нижней сетки. Аналогичные конечно-разностные уравнения можно составить и для любого узла сетки.

Связь между гидравлическими (Φ) и электрическими (R) сопротивлениями устанавливается из условия подобия, которое существует между уравнениями массопереноса и Кирхгофа. Принципиальная электрическая блок-схема расчета представлена на рис. 9. Электрические сопротивления подсчитываются по формулам (23).

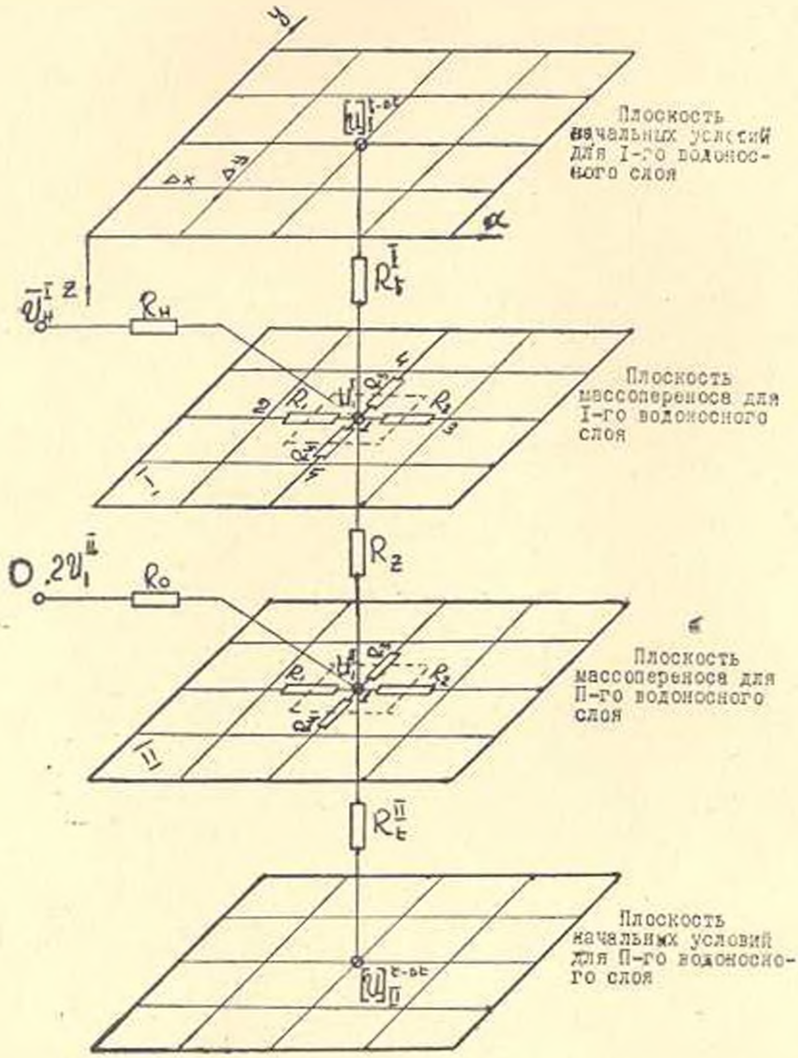

Рис. 9. Блок-схема планово-пространственной задачи по уравнениям (23).

Начальные условия решения конечно-разностных уравнений массопереноса после каждого шага расчета по времени определяются из профильной задачи по изложенному выше методу. Граничные условия можно принимать любые. Из изложенного видно, что задача в целом решается методом итерации. Значение неизвестной функции C_1 (или потенциала в соответствующих точках сетки) определяется методом подбора.

В заключение необходимо изложить более точную методику решения пространственной задачи массопереноса, которая на аналоговой машине УСМ-1 осуществляется следующим образом.

Дифференциальное уравнение массопереноса, начальные и граничные условия для пространственной задачи можно представить так:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(D\frac{\partial C}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(D\frac{\partial C}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(D\frac{\partial C}{\partial z}\right)-\frac{\partial(v_xC)}{\partial x}-\frac{\partial(v_yC)}{\partial y}-$$

$$-\frac{\partial(v_zC)}{\partial z}+\beta(C_n-C)=n\frac{\partial C}{\partial t}; \qquad (25)$$

при $t=0$

$$C(x,\ y,\ z,\ t)=C(x,\ y,\ z,\ 0); \qquad (26)$$

при $t>0$

$$z=0; \quad C(x,\ y,\ z,\ t)=C_0(x,\ y,\ t); \quad z=T; \quad \frac{\partial C}{\partial z}=0; \qquad (27)$$

на боковых контурах

$$C(x,\ y,\ z,\ t)=C^0(x_0,\ y_0,\ z,\ t). \qquad (28)$$

В конечно-разностном виде дифференциальное уравнение (25), например, для узла 1 (рис. 8) можно представить так:

$$\overline{D}_2\frac{\Delta y\Delta z}{\Delta x}(C_2-C_1)+\overline{D}_4\frac{\Delta y\Delta z}{\Delta x}(C_4-C_1)+\overline{D}_6\frac{\Delta x\Delta z}{\Delta y}(C_6-C_1)+$$

$$+\overline{D}_7\frac{\Delta x\Delta z}{\Delta y}(C_7-C_1)+\overline{D}_3\frac{\Delta x\Delta y}{\Delta z}(C_3-C_1)+\overline{D}_5\frac{\Delta x\Delta y}{\Delta z}(C_5-C_1)+$$

$$+\beta(C_n-C_1)\Delta x\Delta y\Delta z=\left(\overline{v}_x\frac{C_4-C_2}{2\Delta x}+\overline{v}_y\frac{C_6-C_7}{2\Delta y}+\right.$$

$$\left.+\overline{v}_z\frac{C_3-C_5}{2\Delta z}\right)\Delta x\Delta y\Delta z=n\frac{C_1^t-[C_1]^{t-\Delta t}}{\Delta t}\Delta x\Delta y\Delta z, \qquad (29)$$

где $\overline{D}_i$ и $\overline{v}_i$ — средние значения коэффициента конвективной диффузии и скоростей фильтрации между соответствующими узловыми точками сетки. Уравнение (29) удобно представить в виде уравнения Кирхгофа:

$$\frac{C_2-C_1}{\Phi_{1x}}+\frac{C_4-C_1}{\Phi_{2x}}+\frac{C_6-C_1}{\Phi_{1y}}+\frac{C_7-C_1}{\Phi_{2y}}+\frac{C_3-C_1}{\Phi_{1z}}+\frac{C_5-C_1}{\Phi_{2z}}+$$

$$+\frac{C_n-C_1}{\Phi_\beta}=\frac{C_1^t-[C_1]^{t-\Delta t}}{\Phi_t}, \qquad (30)$$

где

$$[C_1]^{t-\Delta t} = C^{t-\Delta t} + \left(\bar{v}_x \frac{C_4 - C_2}{2\Delta x} + \bar{v}_y \frac{C_6 - C_5}{2\Delta y} + \bar{v}_z \frac{C_7 - C_3}{2\Delta z}\right) \frac{\Delta t}{n} \Delta x \Delta y \Delta z;$$

$$\Phi_{1x} = \frac{\Delta x}{\bar{D}_2 \Delta y \Delta z}; \quad \Phi_{2x} = \frac{\Delta x}{\bar{D}_4 \Delta y \Delta z}; \quad \Phi_{1y} = \frac{\Delta y}{\bar{D}_6 \Delta x \Delta z};$$

$$\Phi_{2y} = \frac{\Delta y}{\bar{D}_5 \Delta x \Delta z}; \quad \Phi_{1z} = \frac{\Delta z}{\bar{D}_3 \Delta x \Delta y}; \quad \Phi_{2z} = \frac{\Delta z}{\bar{D}_7 \Delta x \Delta y}; \tag{31}$$

$$\Phi_t = \frac{\Delta t}{n \Delta x \Delta y \Delta z}; \quad \Phi_3 = \frac{1}{\beta \Delta x \Delta y \Delta z}.$$

По принятым масштабным коэффициентам α_R, α_U и α_t электрические сопротивления R_x, R_y, R_z и R_t вычисляются по формулам:

$$R_x = \alpha_R \Phi_x; \quad R_y = \alpha_R \Phi_y; \quad R_z = \alpha_R \Phi_z; \quad R_t = \alpha_R \Phi_t.$$

На рис. 8 приведена принципиальная блок-схема расчета. Чтобы не затемнять чертеж, на рис. 8 сопротивление показано для одного узла. В действительности все узлы сетки будут иметь различные сопротивления в зависимости от численных значений коэффициентов конвективной диффузии, скоростей фильтрации и шага Δx, Δy, Δz. На рис. 9 не показаны сеточные плоскости, моделирующие начальные условия массопереноса в покровном и подстилающем слоях, а также сеточная плоскость, моделирующая процесс растворения солей из твердой фазы в жидкую.

Все узловые точки сетки плоскости начальных условий и растворения через сопротивления R_{1t}, R_{2t}, R_3 соединены с соответствующими узловыми точками сетки покровного и подстилающего слоев, моделирующими процессы массопереноса.

При решении пространственной задачи, кроме граничных условий на контуре плоскости x, y, необходимо задаваться также граничными условиями на плоскостях, перпендикулярных оси z. Поэтому при решении пространственной задачи число коммутационных досок (число плоскостей) необходимо брать на две единицы больше (по сравнению с плоско-пространственной задачей)

При решении конкретной задачи на плоскости $z = 0$ задавалось значение концентрации оросительной воды.

На нижней плоскости, т. е. $z = T$, задавалось условие $\dfrac{\partial C}{\partial z} = 0$.

По изложенному методу нами решена одна типовая задача. Результаты решения будут опубликованы отдельно.

Необходимо только отметить, что процесс итерации [это связано с моделированием правой части уравнения (30)] при решении пространственной задачи несколько осложняется, а точность расчета, наоборот, несколько повышается.

Из изложенного видно, что только методом математического моделирования можно учитывать любые сложные условия местности. Например, при решении конкретной задачи нами учтены изменения в пространстве мощностей водоносных слоев, коэффициентов фильтрации, конвективной диффузии, скоростей фильтрации и т. д.

Отметим, что результаты расчетов дали возможность определить во времени и в пространстве изменения минерализации подземных вод в двухслойной фильтрующей среде при капитальных промывках засоленных замель в покровной толще. Полученные результаты позволили также прогнозировать изменения во времени и в пространстве минерализации подземных вод в подстилающем слое, а также определить изменения во времени минерализации откаченных вод из скважины. Эти результаты использованы для разработки технологии капитальных промывок на больших орошаемых площадях.

ЕрПИ им. К. Маркса Поступило 26.IX.1977.

Ս. Ա. ԱՆԱՆՅԱՆ, Ա. Կ. ԱՆԱՆՅԱՆ

ՍՏՈՐԵՐԿՐՅԱ ՋՐԵՐԻ ՊԱՇԱՐՆԵՐԻ ՈՐՈՇՈՒՄԸ ՀԻԴՐՈԴԻՆԱՄԻԿԱԿԱՆ ՄԵԹՈԴՈՎ՝ ՀԱՇՎԻ ԱՌՆԵԼՈՎ ՆՐԱՆՑ ՈՐԱԿԻ ՓՈՓՈԽՈՒՄԸ ՄԱԿԵՐԵՎՈՒՅԹԱՅԻՆ ՀՈՍՔԵՐԻՑ

Ամփոփում

Հոդվածում բերված է ֆիլտրացիայի մասսատեղափոխման դիֆերենցիալ հավասարումների լուծման մեթոդները անալոգային մեքենաների օգնությամբ։ Լուծված են մի շարք խնդիրներ, որոնք վերաբերվում են Արարատյան դաշտավայրի ստորերկրյա ջրերի պաշարների որոշմանը և աղուտների օգտագործման հարցերին։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Оганезов Г. Г.* Подземные воды Араратской равнины. Арм. гос. изд-во, Ереван, 1958.
2. Гидрогеология СССР, том. XI. Армянская ССР. Изд-во «Недра», М., 1968.
3. *Ананян А. К.* Дренаж при освоении содовых солончаков Араратской равнины. Изд-во «Колос», М., 1972.
4. *Ананян А. К., Венгржанович Р. А.* О математической модели для исследования комплекса вопросов по динамике подземных вод. «Водные ресурсы», № 3, изд-во АН СССР, М., 1974.
5. Инструкция по проектированию оросительных систем. Часть VIII; Дренаж на орошаемых землях. М., 1975.
6. *Либман.* Новый метод электрической аналогии для решения нестационарных задач теплопроводности. Механика 3(43), сб. переводов и обзоров иностранной периодической лит-ры, М., 1957.

7. *Веригин Н. Н., Шертунов Б. С., Шапинская Г. Н.* К расчету промывания засоленных почв. Труды координационного совещания по гидротехнике, вып. 35, изд-во «Энергия», М., 1967.
8. *Ганявин Г. Г., Крашин И. И.* Моделирование процессов массо- и теплопереноса в подземных водах на аналогово-цифровом вычислительном комплексе. Материалы межведомственного совещания по мелиоративной гидрологии и инж. геологии, ММСМГиИГ, вып. 1, ч. 1, М., 1972.
9. *Лившиц В. М., Романец Б. Н., Чертков Л. М.* К вопросу прогнозирования засоленности почвогрунтов орошаемых массивов методом математического моделирования, ММСМГиИГ, вып. 1, ч. 1, М., 1962.
10. *Трофимов В. В., Трофимова О. Ф.* Моделирование перемещения солей в почвогрунтах, содержащих тупиковые поры, методом Либмана. ММСМГиИГ вып. 1, ч. 1, М., 1962.
11. *Николаев Н. С., Козлов Э. С., Полгородник Н. П.* Аналоговая математическая машина УСМ-1. М., 1962.