ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Տեխնիկական գիտութ. սերիա XXX, № 5, 1977 Серия технических наук

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

М. А. ЗАДОЯН

ОБ ОДНОЙ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧЕ О ПРИЖАТИИ СЛОЯ К ОСНОВАНИЮ ПРИ УЧЕТЕ РЕОЛОГИЧЕСКИХ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛОВ

Приводится приложение вариационных методов теории ползучести и пластичности к плоской и осесимметричной задачам о прижатии сосредоточенной силой полосы из упруго-ползучего и пластически упрочняющегося материала к упруго-ползучему основанию. Контакт между слоем и основанием считается без сцепления с неизвестными и переменными во времени границами. Материал основания считается упруго-ползучим, подчиняющимся уравнениям наследственной теории ползучести Маслова-Арутюняна [1]. Для слоя рассматриваются два случая: в первом—слой считается бетонным с двусторонними симметричными тонкими усиливающими покрытиями из линейно-упругих материалов, а во втором случае слой считается изготовленным из пластического материала со степенным законом упрочнения.

Вопросы контактных напряжений при ползучести и пластичности исследованы в работах [2—17] и др. В книгах [4, 12, 16] приведены библиография и анализ работ в области контактных напряжений при ползучести и пластичности.

В настоящей статье проявляется интерес преимущественно к прикладной стороне вопроса, а именно, к развитию приближенных методов расчета, в частности, приложению вариационных методов к решению контактных задач теории ползучести и пластичности. С целью изучения качественной стороны вопроса в работе принят параболический закон для прогиба слоя, хотя это приближение не позволяет полностью учитывать влияние изменения размеров контакта [18].

В монографии Ю. Н. Работнова [16] содержится развитие приближенных методов расчета, основанное на вариационных уравнениях для задачи об изгибе однородной балки на винклеровском основании с учетом наследственных свойств материалов. В монографии Т. Ш. Ширинкулова [12], наряду с герцовскими задачами, развита методика расчета бетонных плит на упруго-ползучем основании с использованием ортогональных полиномов. В статье Л. М. Гайтовой [17] дан вариационный метод расчета упруго-ползучей трехслойной плиты на упруго-ползучем винклеровском основании.

§ 1. Плоская задача

1°. Пусть слой шириной единица (балочная плита) и высотой h прижимается без сцепления сосредоточенной силой $P(t)$ к основанию, занимающему нижнюю полуплоскость (рис. 1). Материал основания (грунт, бетон и др.) обладает свойством наследственной ползучести [1]. Длину контакта, меняющуюся во времени, обозначим $2a(t)$, а реактивное давление $p(x,t)$.

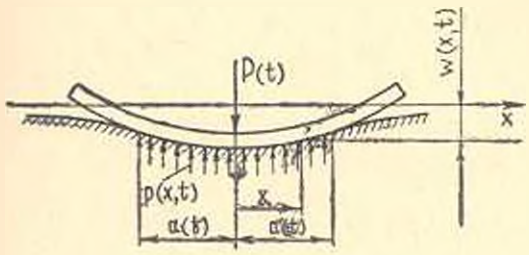

Рис. 1.

Перемещение основания в точках контакта определяется по формулам [10]:

$$w(x, t) = \frac{2(1-\nu_0^2)}{\pi E_0(t)} \left[\omega(x, t) + \int_{\tau_1}^{t} \omega(x, \tau) K_0(t, \tau)\, d\tau \right]; \tag{1.1}$$

$$\omega(x, t) = \int_{-a(t)}^{a(t)} p(\xi, t) \ln \frac{1}{|x-\xi|}\, d\xi \tag{1.2}$$

Здесь ν_0 и $E_0(t)$ — коэффициент Пуассона и модуль мгновенной деформации основания;

$$K_0(t, \tau) = -E_0(t) \frac{\partial}{\partial \tau} \left\{ \frac{1}{E_0(\tau)} + \varphi_0(\tau) \left[1 - e^{-\gamma_0(t-\tau)}\right] \right\}; \tag{1.3}$$

где $\varphi_0(\tau)$ — функция старения;

γ_0 — параметр, характеризующий ползучесть материала основания.

Для старого материала

$$\varphi_0(\tau) = C_0, \quad E_0(t) = E_0$$

и

$$K_0(t, \tau) = \lambda_0 e^{-\gamma_0(t-\tau)}, \qquad \lambda_0 = \gamma_0 E_0 C_0. \tag{1.4}$$

Реактивное давление из (1. 2) представится в виде [19]

$$p(x, t) = -\frac{1}{\pi^2} \sqrt{a^2(t) - x^2} \int_{-a(t)}^{a(t)} \frac{1}{\sqrt{a^2(t) - \xi^2}} \frac{\partial \omega(\xi, t)}{\partial \xi} \frac{d\xi}{\xi - x}. \tag{1.5}$$

Имеем очевидное равенство

$$2\int_{0}^{a(t)} p(\xi, t)\,d\xi = P(t). \tag{1.6}$$

Тогда, используя условие ограниченности напряжения на концах контакта, имеем

$$\int_{-a(t)}^{a(t)} \frac{\partial w(\xi, t)}{\partial \xi} \frac{\xi d\xi}{\sqrt{a^2(t) - \xi^2}} = -\pi P(t). \tag{1.7}$$

Принимаем, что прогиб слоя (осадка основания) меняется по параболическому закону. Тогда можно положить

$$w(x, t) = v(t) - \psi(t)\,x^2, \tag{1.8}$$

где $v(t)$ и $\psi(t)$ — искомые функции времени.

Используя (1.8), из (1.5) и (1.7) находим

$$p(x, t) = \frac{2\psi(t)}{\pi}\sqrt{a^2(t) - x^2}, \tag{1.9}$$

где

$$\psi(t) = P(t)\,a^{-2}(t). \tag{1.10}$$

Вертикальное перемещение основания будет

$$w(x, t) = \frac{2(1 - \nu_0^2)}{\pi E_0(t)}\,[v_*(t) - \psi_*(t)\,x^2], \tag{1.11}$$

где индексом * обозначен интегральный оператор Вольтерра

$$\psi_*(t) = \psi(t) + \int_{\tau_0}^{t} \psi(\tau)\,K_0(t, \tau)\,d\tau. \tag{1.12}$$

Рассмотрим два вида слоя.

2°. Исследуем случай, когда слой изготовлен из бетона с симметричными тонкими усиливающими покрытиями. Толщина усиливающих слоев (Δ) по сравнению с толщиной бетонного слоя (h) считается малой.

Зависимость между изгибающим моментом и кривизной слоя имеет вид [20]

$$M(x, t) = B(t)\,\varkappa(x, t) - \int_{\tau_0}^{t} B_0(\tau)\,\varkappa(x, \tau)\,R(t, \tau)\,d\tau, \tag{1.13}$$

где

$$\varkappa(x,\ t) = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \qquad B(t) = B_0(t)\,\mu(t);$$

$$B_0(t) = \frac{E(t)\,h^3}{12(1-\nu^2)}; \qquad \mu(t) = 1 + 6\,\frac{1-\nu^2}{1-\nu_1^2}\,\frac{E_1\Delta}{E(t)\,h}; \tag{1.14}$$

E_1 и ν_1 — модуль упругости и коэффициент Пауссона материала усиливающих слоев; $E(t)$ — модуль мгновенной деформации бетона;

$$R(t,\ \tau) = \frac{E'(\tau)}{E(\tau)} + \gamma\varphi(\tau)\,E(\varphi) - \frac{N(\tau)}{E(\tau)}\int_{\tau}^{t} E(\xi)\exp\left[-\int_{\tau}^{\xi}\eta(z)\,dz\right]d\xi, \tag{1.15}$$

где

$$N(\tau) = \varphi^2(\tau) - \gamma\eta(\tau) + \gamma\varphi'(\tau); \qquad \eta(\tau) = \gamma\,[1 + \varphi(\tau)\,E(\tau)].$$

В случае старого бетона

$$\varphi(\tau) = C \quad \text{и} \quad E(t) = E,$$

тогда

$$R(t,\ \tau) = \lambda e^{-\eta(t-\tau)}; \qquad \lambda = \gamma EC; \qquad \eta = \gamma(1 + EC). \tag{1.16}$$

Напряжения в верхнем и нижнем покрытиях выражаются через кривизны соответственно формулами

$$\left.\begin{matrix}\sigma_1(x,\ t)\\ \sigma_2(x,\ t)\end{matrix}\right\} = \pm\,\frac{E_1 h}{2(1-\nu_1^2)}\,\varkappa(x,\ t). \tag{1.17}$$

Напряжение в бетонной части слоя определяется по формуле

$$\sigma(x,\ z,\ t) = \frac{E(t)\,z}{1-\nu^2}\,\varkappa(x,\ t) - \int_{\tau_1}^{t}\frac{E(\tau)\,z}{1-\nu^2}\,\varkappa(x,\ \tau)\,R(t,\ \tau)\,d\tau. \tag{1.18}$$

Согласно принципу возможных перемещений будем иметь

$$a\left[B_* - \int_{\tau_1}^{t} B_*\varkappa R(t,\ \tau)\,d\tau\right]\delta\varkappa - \int_0^{a(t)} p(x,\ t)\,[\delta w(0,\ t) - \delta w(x,\ t)]\,dx = 0. \tag{1.19}$$

Здесь использовано равенство (1.6).

Подставляя (1.9) и (1.11) в (1.19) и производя выкладки, приходим к уравнению

$$\psi_*(t) - \int_{\tau_1}^{t}\psi_*(\tau)\,R_1(t,\ \tau)\,d\tau = \frac{P^{-1/2}(t)}{B_*(t)}\,\psi^{-1/2}(t), \tag{1.20}$$

где

$$R_1(t,\ \tau) = \frac{E_0(t)}{E_0(\tau)}\,\frac{E(\tau)}{E(t)}\,\frac{R(t,\ \tau)}{\mu(t)}; \qquad B_*(t) = \frac{64(1-\nu_0^2)}{\pi E_0(t)}\,B(t). \tag{1.21}$$

Учитывая выражения (1.12), из (1.20), применяя формулу о преобразовании двойного интеграла, приходим к нелинейному интегральному уравнению типа Вольтерра

$$\psi(t) + \int_{\tau_1}^{t} \psi(\tau) K_*(t, \tau)\, d\tau = \frac{P^{1/2}(t)}{B_*(t)} \psi^{-1/2}(t), \tag{1.22}$$

где

$$K_*(t, \tau) = K_0(t, \tau) - R_1(t, \tau) - \int_{\tau}^{t} K_0(\xi, \tau) R_1(t, \xi)\, d\xi. \tag{1.23}$$

Для старых материалов

$$K_*(t, \tau) = Ae^{-\eta(t-\tau)} + A_0 e^{-\gamma_0(t-\tau)}, \tag{1.24}$$

где

$$A = \frac{\lambda(\gamma_0 - \eta)}{\mu(\eta - \gamma_0)}; \qquad A_0 = \lambda_0 \left[1 - \frac{\lambda}{\mu(\eta - \gamma_0)} \right].$$

Для постоянной силы, вводя обозначения:

$$a(t) = a_0 f(t); \qquad a_0 = h \sqrt[3]{\frac{16}{3\pi} \frac{1-\nu_0^2}{1-\nu^2} \frac{E}{E_0} \mu} \tag{1.25}$$

и исключая $\psi(t)$ при помощи соотношения (1.10), приходим к нелинейному интегральному уравнению

$$f^{-2}(t) + \int_{\tau_1}^{t} f^{-2}(\tau) K_*(t, \tau)\, d\tau = f(t). \tag{1.26}$$

Отсюда имеем $f(\tau_1) = 1$. Предельным переходом при $t \to \infty$ из (1.26) находим

$$f_* = \sqrt[3]{1 + \frac{A}{\eta} + \frac{A_0}{\gamma_0}}. \tag{1.27}$$

Здесь и далее через f_* и a_* обозначены их значения при $t \to \infty$.

Уравнение (1.26) приводится к нелинейному дифференциальному уравнению второго порядка

$$f(2 + f^3) f'' = 6f'^2 - bf + m, \tag{1.28}$$

где

$$\begin{gathered} b = f[2(\gamma_0 + \eta + A + A_0) + (\gamma_0 + \eta) f^3]; \\ m = f^2(\gamma_0\eta + \eta A_0 + \gamma_0 A - \gamma_0\eta f^3). \end{gathered} \tag{1.29}$$

При помощи подстановки

$$t - \tau_1 = \int_{\tau_1}^{f} X(x)\,dx \tag{1.30}$$

уравнение (1.28) приводится к дифференциальному уравнению первого порядка

$$f(2 + f^3)X' + mX^2 - bX + 6 = 0 \tag{1.31}$$

с начальным условием

$$X(1) = 3(\gamma_0 + A + A_0)^{-1}. \tag{1.32}$$

При помощи (1.30)—(1.31) легко получить численное решение задачи.

При одинаковых реологических свойствах слоя и основания $A=0$, и интегральное уравнение (1.26) приводится к дифференциальному уравнению первого порядка

$$(2 + f^3)f' = (\gamma_0 + A_0 - \gamma_0 f^3)f, \tag{1.33}$$

решение которого при условии $f(\tau_1) = 1$ будет

$$t - \tau_1 = -\frac{1}{\gamma_0}\ln\left\{f\left[\frac{f_*^2 - f^2}{f^3(f_*^2 - 1)}\right]^{\frac{2}{3f_*^3} + \frac{1}{3}}\right\}, \tag{1.34}$$

где

$$f_* = \sqrt[3]{1 + \left(1 - \frac{1}{\mu}\right)EC}.$$

В случае чисто-упругого основания $A_0=0$, $A=-\lambda/\mu$, и приходим к решению (1.34), причем в этом решении нужно принять

$$f_* = \sqrt[3]{1 - \frac{EC}{(1 + EC)\mu}}. \tag{1.35}$$

По формуле (1.34) построены графики $\frac{a(t)}{a_0}$ для рассмотренных двух случаев, которые приведены на рис. 2. Численные значения параметров здесь и далее следующие: $E_0 = 2\cdot 10^5$ *кГ/см²*, $C_0 = 0{,}9\cdot 10^{-4}$ *см²/кГ*, $\gamma_0 = 0{,}026\ \frac{1}{\text{день}}$, $\frac{\lambda}{\mu} = \frac{1}{20}$.

Анализ полученных формул показывает, что при одинаковых свойствах ползучести основания и слоя длина контакта при постоянной силе в течение времени возрастает, а при отсутствии свойства ползучести основания—уменьшается.

3°. Предположим, что слой изготовлен из пластического материла со степенным законом упрочнения. Зависимость между изгибающим моментом и кривизной балки принимаем в виде

$$M = D\varkappa^{\frac{1}{n}}, \qquad D = \frac{D_0 h^{2+\frac{1}{n}}}{2+\frac{1}{n}}, \tag{1.36}$$

D_0 — параметр, характеризующий материал, $n > 1$.

Вариационное уравнение задачи будет

$$aD\varkappa^{\frac{1}{n}}\delta\varkappa - \int_0^{a(t)} p(x, t)\,[\delta w(0, t) - \delta w(x, t)]\,dx = 0. \tag{1.37}$$

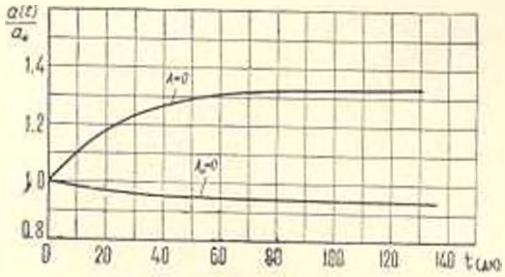

Рис. 2.

Подставляя (1.9) и (1.11) в (1.37) и делая необходимые выкладки, получим

$$\varphi(t) + \int_{\tau_1}^{t} \varphi(\tau)\, K_0(t, \tau)\, d\tau = \frac{P^{\frac{3n}{2}}(t)}{D_*(t)}\, \varphi^{-\frac{n}{2}}(t), \tag{1.38}$$

где

$$D_*(t) = \frac{4(1-\nu_0^2)}{\pi E_0(t)} \left(\frac{16nD_0}{2n+1}\right)^n h^{2n+1}. \tag{1.39}$$

Для постоянной силы и старого материала, исключая $\varphi(t)$, из (1.38) приходим к интегральному уравнению

$$f^{-2}(t) + \int_{\tau_1}^{t} f^{-2}(\tau)\, K_0(t, \tau)\, d\tau = f^n(t), \tag{1.40}$$

причем $f(t) = a(t)/a_0$, где

$$a_0 = h\left[\frac{4(1-\nu_0^2)}{\pi E_0}\right]^{\frac{1}{n+2}} \left(\frac{16nD_0}{2n+1}\right)^{\frac{n}{n+2}} \left(\frac{h}{P}\right)^{\frac{n-1}{n+2}}. \tag{1.41}$$

Предельным переходом из (1.40) находим

$$f_* = (1 + E_0C_0)^{\frac{1}{n+2}}. \tag{1.42}$$

Уравнение (1.40) приводится к дифференциальному уравнению первого порядка

$$(2 - nf^{n+1})f' = \gamma_0 f - \gamma_0 f^{n+2}, \tag{1.43}$$

решение которого будет

$$t - \tau_1 = \frac{1}{\gamma_0} \ln \left[f^2 \left(\frac{f_*^n - 1}{f_*^n - f^n} \right)^{\frac{f_*^n + 1}{2}} \right]. \tag{1.44}$$

На рис. 3 приведены графики функции $a(t)/a_0$ для различных значений n и параметров $\alpha = 2°$.

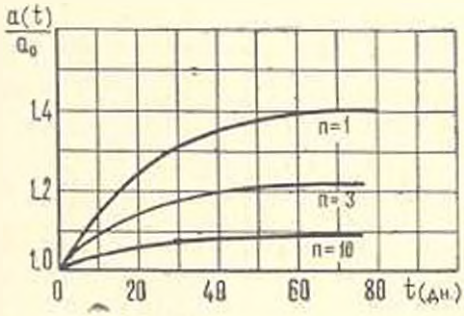

Рис. 3.

Можно поставить обратную задачу: определить закон изменения во времени $P(t)$ при условии $a(t) = \text{const}$. Тогда для старого материала, исключая из (1.38) $\psi(t)$, приходим к уравнению

$$q(t) + \int_{\tau_1}^{t} q(\tau) K_0(t, \tau) d\tau = q^n(t), \tag{1.45}$$

причем $q(t) = P(t)/P(\tau_1)$. Предельным переходом при $t \to \infty$ из (1.45) находим

$$q_* = (1 + E_0C_0)^{\frac{1}{n-1}}. \tag{1.46}$$

Интегральное уравнение (1.45) приводится к дифференциальному уравнению

$$(1 - nq^{n-1})q' = \gamma_0 q^n - \gamma_0 q, \tag{1.47}$$

решение которого при начальном условии $q(\tau_1) = 1$ имеет вид

$$t-\tau_1=-\frac{1}{\eta_0}\ln\left[q\left(\frac{q_*^{n-1}-q^{n-1}}{q_*^{n-1}-1}\right)^{\frac{nq_*^{n-1}-1}{n-1}}\right]. \qquad (1.48)$$

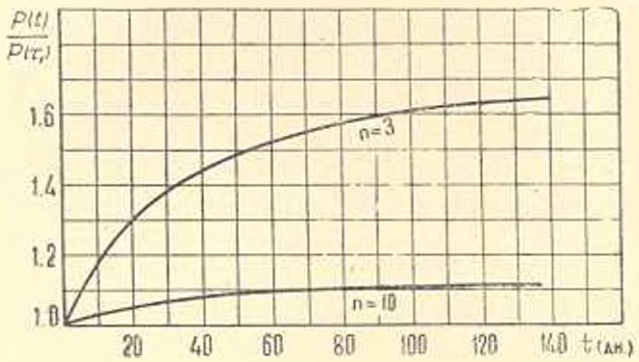

Рис. 4.

Таким образом, если внешняя сила возрастает во времени по закону (1.48), то длина контакта остается постоянной $a(t)=a_0$ (рис. 4).

§ 2. Осесимметричная задача

1°. Пусть тонкая круглая плита прижимается сосредоточенной, приложенной в центре плиты, силой $P(t)$ к основанию, занимающему нижнее полупространство (рис. 5). Контакт между слоем и основанием считаем без сцепления с радиусом круговой области контакта $a(t)$.

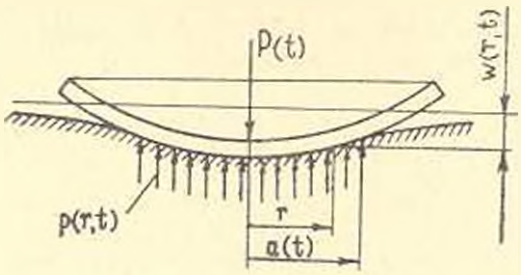

Рис. 5.

Вертикальное перемещение точек контактной поверхности выражается через реактивное давление $p(r,t)$ по формуле [10]

$$w(r,t)=\frac{1-\nu_0^2}{\pi E_0(t)}\left[\omega(r,t)+\int_{t_0}^{t}\omega(r,\tau)K_0(t,\tau)\,d\tau\right]. \qquad (2.1)$$

$$w(r, t) = \iint\limits_{\Omega} \frac{p(\xi, t)\,\xi d\xi d\theta}{\sqrt{r^2 + \xi^2 - 2r\xi\cos\theta}}, \qquad 0 < r < a(t) \tag{2.2}$$

где Ω—область контакта.

Реактивное давление можно представить в виде [19]

$$p(r, t) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{r}^{a(t)} \frac{1}{\sqrt{\xi^2 - r^2}}\frac{\partial F(\xi, t)}{d\xi}d\xi, \tag{2.2}$$

$$F(r, t) = \frac{2}{\pi}\left[w(0, t) + r\int\limits_{0}^{r} \frac{1}{\sqrt{r^2 - \xi^2}}\frac{\partial w}{d\xi}d\xi\right]. \tag{2.3}$$

Реактивное давление удовлетворяет условию

$$2\pi\int\limits_{0}^{a(t)} p(r, t)\,r dr = P(t). \tag{2.4}$$

Учитывая ограниченность напряжения на границе контактной области, будем иметь:

$$F[a(t), t] = 0; \qquad \int\limits_{0}^{a(t)} F(\xi, t)\,d\xi = P(t). \tag{2.5}$$

Вводим предположение, что прогиб плиты меняется по параболическому закону. Тогда можно принять

$$w(r, t) = v(t) - \psi(t)\,r^2, \tag{2.6}$$

где $v(t)$ и $\psi(t)$ — искомые функции времени.

Из (2.3) и (2.5) получим

$$F(r, t) = \frac{2}{\pi}\left[v(t) - 2\psi(t)\,r^2\right]. \tag{2.7}$$

Далее, подставляя (2.7) в (2.2) и производя необходимые выкладки, получим

$$p(r, t) = \frac{4}{\pi}\psi(t)\sqrt{a^2(t) - r^2}. \tag{2.8}$$

Используя условия (2.5), находим:

$$v(t) = \frac{3\pi}{4}\frac{P(t)}{a(t)}; \qquad \psi(t) = \frac{3\pi}{8}\frac{P(t)}{a^3(t)}. \tag{2.9}$$

Выражение прогиба плиты будет

$$w(r, t) = \frac{1 - \nu_0^2}{\pi E_0(t)}\left[v_0(t) - \psi_0(t)\,r^2\right]. \tag{2.10}$$

причем индекс *, как и в предыдущем параграфе, означает оператор Вольтерра (1.12).

2°. Рассмотрим случай, когда плита трехслойная с симметричными тонкими усиливающими покрытиями. Материал покрытия считаем линейно-упругим, средний слой — бетон, подчиняющийся соотношениям теории ползучести Маслова-Арутюняна [1].

Из условий статики элемента плиты и соотношения между напряжениями и деформациями следуют зависимости между компонентами изгибающих моментов и кривизн средней поверхности плиты

$$M_r = B\varkappa_r + B_1\varkappa_\theta - \int_{\tau_1}^{t} B_0(\varkappa_r + \nu\varkappa_\theta)\, R(t, \tau)\, d\tau, \tag{2.11}$$

где

$$\varkappa_r = -\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}; \qquad \varkappa_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}; \qquad B_1 = \nu B_0 + \nu_1 \frac{E_1 \Delta h^2}{2(1-\nu_1^2)}; \tag{2.12}$$

а B и B_0 определяются по формулам (1.14).

Согласно принципу возможных перемещений имеем

$$a^2(M_r\delta\varkappa_r + M_\theta\delta\varkappa_\theta) - 2\int_0^{a(t)} p(r, t)\,[\delta w(0, t) - \delta w(r, t)]\, r dr = 0. \tag{2.13}$$

Здесь использовано равенство (2.4). Используя выражения прогиба (2.10), реактивного давления (2.8) и соотношения (2.11), из (2.13) приходим к уравнению

$$\varphi_*(t) - \int_{\tau_1}^{t} \varphi_*(\tau)\, R_1(t, \tau)\, d\tau = \frac{P(t)}{Q(t)}, \tag{2.14}$$

где

$$R_1(t, \tau) = \frac{E_0(t)}{E_0(\tau)}\,\frac{E(\tau)}{E(t)}\,\frac{R(t, \tau)}{\mu_1(t)}; \qquad \mu_1(t) = 1 + 6\frac{1-\nu}{1-\nu_1}\,\frac{E_1\Delta}{E(t)\,h};$$

$$Q(t) = \frac{5}{3}\,\frac{1-\nu_0^2}{1-\nu}\,\frac{E(t)}{E_0(t)}\,\mu_1(t)\,h^3. \tag{2.15}$$

Применяя формулу Дирихле о преобразовании двойного интеграла и исключая $\varphi(t)$ из (2.14), получим интегральное уравнение

$$P(t)\,a^{-3}(t) + \int_{\tau_1}^{t} P(\tau)\,a^{-3}(\tau)\, K_*(t, \tau)\, d\tau = \frac{P(t)}{Q_*(t)}, \tag{2.16}$$

где

$$Q_*(t) = \frac{3\pi}{8} Q(t);$$

$$K_*(t, \tau) = K_0(t, \tau) - R_1(t, \tau) - \int_{\tau_1}^{t} K_0(t, \xi) R_1(\xi, \tau) d\xi. \tag{2.17}$$

Для старых материалов $K_*(t, \tau)$ имеет вид (1.21), но в выражениях A и A_0 следует μ заменить через μ_1. Вводим обозначение

$$a(t) = a_0 \sqrt[3]{f(t)},$$

где

$$a_0 = h \sqrt[3]{\frac{5\pi}{8} \frac{1-\nu_0^2}{1-\nu} \frac{E}{E_0} \tau_3} \tag{2.18}$$

—начальный радиус контактной области.

Если через a_0' обозначить значение этой величины, полученное Р. А. Вейманом [21] точным методом для однородных упругих материалов плиты и основания, то при $\mu_1 = 1$ будем иметь

$$\frac{a_0}{a_0'} \approx 0{,}78 \sqrt[3]{1+\nu}, \tag{2.19}$$

что при $\nu = 0{,}4$ дает значение $a_0/a_0' \approx 0{,}88$.

Далее, принимая $P(t) = \text{const}$, из (2.16) приходим к линейному интегральному уравнению

$$f(t) + \int_{\tau_1}^{t} f(\tau) K_*(t, \tau) d\tau = 1, \tag{2.20}$$

которое приводится к дифференциальному уравнению второго порядка с постоянными коэффициентами

$$f'' + s_1 f' + s_2 f = \gamma_0 \gamma_1, \tag{2.21}$$

где

$$s_1 = \gamma_0 + \gamma_1 + A_0 + A; \qquad s_2 = \gamma_0\gamma_1 + \gamma_1 A_0 + \gamma_0 A,$$

с начальными условиями:

$$f(\tau_1) = 1; \qquad f'(\tau_1) = -A_0 - A. \tag{2.22}$$

Если положить $s_1^2 - 4s_2 > 0$ и ввести обозначения

$$\alpha = \frac{s_1 - \sqrt{s_1^2 - 4s_2}}{2}; \qquad \beta = \frac{s_1 + \sqrt{s_1^2 - 4s_2}}{2}, \tag{2.23}$$

решение уравнения (2.21) при начальных условиях (2.22) будет

$$f(t) = \frac{\gamma_0\gamma_1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\alpha-\beta}\left[\left(A_0 + A - \beta + \frac{\gamma_0\gamma_1}{\alpha}\right)e^{-\alpha(t-\tau_0)} - \right.$$

$$\left. - \left(A_0 + A - \alpha + \frac{\gamma_0\gamma_1}{\beta}\right)e^{-\beta(t-\tau_0)}\right]. \qquad (2.24)$$

При $t \to \infty$ получаем

$$a_* = a_0 \sqrt[3]{1 + \frac{A}{\gamma_1} + \frac{A_0}{\gamma_0}}. \qquad (2.25)$$

Отсюда легко заметить, что при одинаковых реологических свойствах основания и бетонного слоя плиты ($A=0$) радиус контактной области возрастает во времени, а в случае отсутствия у материала основания свойств ползучести ($A_0=0$, $A=-\lambda/\mu$) радиус этой области уменьшается во времени.

3°. Пусть круглая тонкая плита изготовлена из пластического материала со степенным законом упрочнения. Между интенсивностями изгибающих моментов и кривизн принимаем зависимость

$$M_0 = D\varkappa_0^{\frac{1}{n}}, \qquad (2.26)$$

где

$$M_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{M_r^2 - M_r M_\theta + M_\theta^2}; \qquad \varkappa_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\varkappa_r^2 + \varkappa_r\varkappa_\theta + \varkappa_\theta^2}.$$

Вариационное уравнение рассматриваемой задачи будет

$$a^2 D\varkappa_0^{\frac{1}{n}}\delta\varkappa_0 - 2\int_0^{a(t)} p(r, t)\,[\delta w(0, t) - \delta w(r, t)]\,r\,dr = 0. \qquad (2.27)$$

Используя выражения прогиба плиты (2.10) и реактивного давления (2.8), из (2.27) получаем

$$\varphi(t) + \int_{\tau_0}^{t} \varphi(\tau)\,K_0(t, \tau)\,d\tau = \frac{P^n(t)}{H(t)}, \qquad (2.28)$$

где

$$H(t) = \frac{2(1-\nu_0^2)}{\pi E_0(t)}\left(\frac{5\pi n D_0}{2n+1}\right)^n h^{2n+1}. \qquad (2.29)$$

Исключая $\varphi(t)$ при помощи (2.9) и обозначая $H_*(t) = \frac{3\pi}{8}H(t)$, из (2.28) приходим к уравнению

$$P(t)\,a^{-3}(t) + \int_{\tau_0}^{t} P(\tau)\,a^{-3}(\tau)\,K_0(t, \tau)\,d\tau = \frac{P^n(t)}{H_*(t)}. \qquad (2.30)$$

Для старого материала основания и постоянной силы, обозначая

$$a(t) = a_0 \sqrt[3]{f(t)},$$

где

$$a_0 = h \sqrt[3]{\frac{3}{4} \frac{1-\nu_0^2}{E_0(t)} \left(\frac{5-nD_0}{2n+1}\right)^{\frac{n}{3}} \left(\frac{h^n}{P}\right)^{\frac{n-1}{3}}}, \tag{2.31}$$

получим интегральное уравнение

$$f(t) + \int_{t_1}^{t} f(\tau) K_0(t, \tau)\, d\tau = 1, \tag{2.32}$$

решение которого будет

$$f(t) = \frac{1}{1 + E_0 C_0} \left[1 - E_0 C_0 e^{-\alpha(t-t_1)/(1+E_0C_0)}\right]. \tag{2.33}$$

Предельное значение радиуса области контакта при $t \to \infty$ будет

$$a_* = a_0 \sqrt[3]{1 + E_0 C_0}. \tag{2.34}$$

На рис. 6 показан график функции $a(t)/a_0$ построенный по формуле (2.33) при прежних значениях параметров.

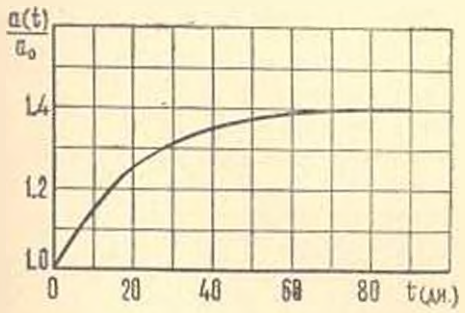

Рис. 6.

Обратная задача здесь не отличается от задачи, рассмотренной в плоском случае. Действительно, для старого бетона, принимая в (2.30) $a(t) = \text{const}$ и исключая H_*, для искомого закона изменения $q(t) = P(t) \Phi(\tau_1)$ приходим к тому же уравнению (1.45).

Институт механики
АН АрмССР

Մ. Ա. ԶԱԴՈՅԱՆ

ՀԻՄՆԱՏԱԿԻՆ ՍԵՂՄՎԱԾ ՇԵՐՏԻ ՄԻ ՎԱՐԻԱՑԻՈՆ ԽՆԴՐԻ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ ՀԱՇՎԻ ԱՌԱՋ ՆՅՈՒԹԻ ՌԵՈԼՈԳԻԱԿԱՆ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

Ամփոփում

Հոդվածում բերված է սողքի և պլաստիկության տեսության վարիացիոն մեթոդների կիրառումը առաձգա-սողուն ու պլաստիկորեն ամրացող նյութից շերտը կենտրոնացված ուժով առաձգա-մածուցիկ հիմնատակին սեղմելիս հարթ և տաանդրատիմետրիկ խնդիրները լուծելու համար։ Շերտի և հիմնատակի կոնտակտը բնդունվում է առանց շաղկապման՝ անհալտ ու ժամանակի ընթացքում փոփոխական սահմաններով։ Հիմնատակի նյութը բնդունվում է առաձգա-սողուն, որը ենթարկվում է սողքի ժառանգական տեսության Մաս-լով-Հարությունյանի հավասարումներին։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнян Н. Х.* Некоторые вопросы теории ползучести. ГИТТЛ, М.—Л., 1952.
2. *Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. Л.* О температурных напряжениях в прямоугольных блоках. Изв. АН АрмССР, серия ФМЕТ наук, т. 8, № 4, 1955.
3. *Арутюнян Н. Х.* Плоская контактная задача теории ползучести. ПММ, т. 23, в. 5, 1959.
4. *Работнов Ю. Н.* Ползучесть элементов конструкций. «Наука», М., 1966.
5. *Работнов Ю. Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. «Наука», М., 1977.
6. *Арутюнян Н. Х.* Плоская контактная задача теории пластичности со степенным упрочнением. Изв. АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, т. 12, № 2, 1959.
7. *Надаи А.* Пластичность и разрушение твердых тел. «Мир», т. 2, М., 1969.
8. *Ржаницын А. Р.* Теория ползучести. Стройиздат, М., 1968.
9. *Соколовский В. В.* Теория пластичности. Высшая школа, М., 1969.
10. *Прокопович И. Е.* О решении плоской контактной задачи с учетом ползучести. ПММ, т. 20, в. 6, 1956.
11. *Розовский М. И.* О влиянии реологических свойств основания и лежащих на нем полосы и круглой плиты на показатели их гибкости. Сб. «Реологические вопросы механики горных пород», изд-во АН КазССР, Алма-Ата, 1964.
12. *Ширинкулов Т. Ш.* Методы расчета конструкции на сплошном основании с учетом ползучести. Изд-во «ФАН», УзбССР, Ташкент, 1969.
13. *Какосимиди Н. Ф.* Расчет фундаментной полосы с учетом ползучести основания. Изв. АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, т. 13, № 6, 1960.
14. *Lee E. H., Radok J. R. M.* The contact problem for visco-elastic bodies. J. Appl. Mech. № 3, v. 27, 1960.
15. *Задоян М. А.* Термонапряженное состояние бетонных блоков с учетом ползучести материала. Изв. АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, т. 10, № 5, 1957.
16. Развитие теории контактных задач в СССР. АН СССР, инст. пробл. механики, «Наука», М., 1976.
17. *Гайтова Л. М.* Расчет на изгиб упруго-ползучей железобетонной плиты на упруго-ползучем основании. Изв. АН АрмССР, серия техн. наук, т. 29, № 1, 1976.

18 *Белоконь А. В., Ворович И. И.* Контактные задачи линейной теории вязкоупругости без учета сил трения и сцепления. Изв. АН СССР. МТТ. № 6, 1973.
19. *Штаерман И. Я.* Контактная задача теории упругости. Госиздат. М., 1949
20 *Задоян М. А.* О применении вариационных методов теории ползучести при расчете статически-неопределимых железобетонных конструкций. Изв. АН АрмССР. серия техн. наук, т. 27, № 1, 1974.
21 *Вейцман Р. А.* О контакте без сцепления между пластинок и упругим полупространством. Прикладная механика (перевод с английского) (Trans. ASME), серия Е, т. 36, № 2, 1969.